

ВЕКОВАЯ ЭВОЛЮЦИЯ И СТАБИЛЬНОСТЬ КОЛЕЦ ВОКРУГ РОТАЦИОННО НЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЛ. ПЕРЕСМОТР ПРОБЛЕМЫ

© 2024 г. Б. П. Кондратьев^{1,2,3,*}, В. С. Корноухов^{1,2}

¹Физический факультет, Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

²Государственный астрономический институт им. П. К. Штернберга,
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

³Главная (Пулковская) Астрономическая обсерватория РАН, Санкт-Петербург, Россия

E-mail: work@boris-kondratyev.ru

Поступила в редакцию 18.03.2024 г.

После доработки 23.04.2024 г.

Принята в печать 04.06.2024 г.

Разработан метод исследования вековой эволюции и сохранения формы колец у малых небесных тел, не имеющих спутников-пастухов. Построена модель составного кольца, состоящая из двух близких, в общем случае некомпланарных эллиптических колечек Гаусса. Самогравитация кольца учитывается через взаимную гравитационную энергию W_{mut} граничных колечек. Функция W_{mut} представлена в виде ряда с точностью до 4-й степени малых эксцентриситетов и взаимного наклона колечек. Вековая эволюция составного кольца описывается дифференциальными уравнениями в специальных (коллективных) переменных. Для колец без центрального тела (задача 1) с помощью функции взаимной энергии получена замкнутая система из 8 дифференциальных уравнений. Изучается также эволюция колец в азимутально усредненном потенциале вращающегося трехосного тела (задача 2); для нее выводится вторая система из восьми дифференциальных уравнений. В обеих задачах, кроме общего случая, рассматриваются две частные: i) случай компланарных эллиптических колец и ii) случай круглых колец с наклоном. Теория применяется для изучения недавно открытого кольца карликовой планеты Хаумеа. Показано, что без учета самогравитации время нодальной прецессии кольца Хаумеа равно $T_{\Omega} = 12.9 \pm 0.7d$, но учет самогравитации кольца может уменьшить этот период. Установлено, что самогравитация действительно способствует сохранению формы кольца без привлечения гипотезы о спутниках-пастухах. Получены критерии сохранения формы колец, позволившие оценить интервал для отношения массы кольца к массе Хаумеа $10^{-4} < m / M < 10^{-3}$. С учетом оптической толщины кольца $\tau \approx 0.5$ показано, что кольцо Хаумеа массой $m / M \approx 1 \div 2 \cdot 10^{-4}$ может состоять из ледяных частиц размером $d_0 \approx 0.7 \div 1$ м.

Ключевые слова: кольца непланетного типа и их стабильность, самогравитация колец, кольца Гаусса и их взаимная энергия, усредненный по азимуту потенциал центрального тела, уравнения вековой эволюции колец, карликовая планета Хаумеа

DOI: 10.31857/S0004629924070081 EDN: IUCHTI

1. ВВЕДЕНИЕ

Кольца вокруг небесных тел давно привлекают исследователей. Изложение истории вопроса от Ньютона до 1990 г. см. в книге Фридмана и Горькавого [1], где изучаются кольца вокруг четырех планет-гигантов в Солнечной системе. Резкий край колец там объясняется механизмом столкновений частиц и резонансами орбит частиц со спутниками-пастухами.

После недавнего открытия колец у малых небесных тел (астероида-кентавра Chariklo [2, 3] и двух объектов пояса Койпера Haumea [4] и Quaoar [5])

интерес к динамике колец еще более возрос. Эти кольца отличаются от колец планетного типа: они узкие и не имеют спутников-пастухов, и для них остро встает проблема описания вековой эволюции и создания новых механизмов сохранения формы. У нас особое внимание уделяется механизму самогравитации колец.

Для реализации механизма самогравитации реальных колец мы обращаемся к модели колец Гаусса, см., например, [6]. Пространственный потенциал кольца Гаусса в конечном аналитическом виде был

получен в [7]. Некоторое развитие метод колец Гаусса получил в работах [8–11]. В [8] предложена плоская модель для ϵ -кольца Урана, состоящая из двух граничных эллиптических колечек Гаусса с общим фокусом и соосными линиями апсид. Для объяснения резких границ ϵ -кольца вводится условие компенсации дифференциальной прецессии узлов колечек в гравитационном поле Урана за счет их взаимного гравитационного притяжения. Данный подход позволил оценить массу ϵ -кольца.

В работе [9] рассматривался частный случай прецессии 2D кольца, состоящего из круглых колец с малым наклоном к экватору центрального тела. Более сложная задача — прецессия эллиптических колец с несовпадающими линиями апсид — решалась в работе [10]; в этой модели эксцентриситеты граничных колец эволюционируют, и для удержания границ кольца от расплывания авторы вводят условие «дэмпинга» эксцентриситетов.

Более подробно проблема эволюции колец изучалась в работе [11]. В ней уравнения эволюции орбит получены путем осреднения уравнений Ньютона-Эйлера по средним аномалиям, ограничений на наклоны и эксцентриситеты орбит не ставилось. Для рассмотрения пересекающихся орбит в уравнения вводился смягчающий параметр. В аналитическом аспекте метод усреднений в [11] был реализован не полностью: авторам удалось аналитически усреднить ускорение только по орбитам возмущающих тел, по орбите возмущаемого тела усреднение проводилось методом численного интегрирования.

В русле исследований колец непланетного типа отметим работы [12] и [13]. В статье [14] была решена задача о взаимной энергии двух компланарных гравитирующих колец Гаусса и построена модель плоского 2D кольца. Дальнейшее развитие метод колец получил в работе [15], где уравнения вековой эволюции выводились с помощью функции взаимной потенциальной энергии колец Гаусса. Необходимо отметить, что в [15] выражение взаимной энергии колец, а также уравнения их эволюции были получены в виде ряда по степеням малых эксцентриситетов и взаимных наклонов колец с точностью до членов 5-го порядка малости включительно. Адекватность данного подхода была проверена на примере двупланетной задачи Солнце-Юпитер-Сатурн.

Разработка новых подходов к проблеме происхождения и эволюции колец является актуальным направлением в современной небесной механике. В данной работе модифицирован и расширен мате-

матический аппарат для изучения колец вокруг малых небесных тел. В основе данного подхода лежит представление узкого 2D кольца системой из двух близких колечек Гаусса. Необходимым условием стабилизации формы составного кольца является учет его самогравитации через взаимную энергию граничных колечек. В разделе 2, опираясь на метод взаимной энергии, в специальных (коллективных) переменных получена система из восьми дифференциальных уравнений эволюции для взаимно гравитирующих колец Гаусса без центрального тела. В разделе 3 выводится система уравнений, описывающих эволюцию эллиптических колец в азимутально усредненном потенциале вращающегося трехосного тела. Кроме общего случая здесь рассматриваются два специальных варианта: i) для компланарных эллиптических колец и ii) для круглых колец с наклоном к экватору. В разделе 4 получены критерии сохранения формы 2D колец. На основании этих критериев в разделе 5 дана оценка массы кольца у карликовой планеты Хаумеа.

2. ЗАДАЧА 1. УРАВНЕНИЯ ЭВОЛЮЦИИ ГРАВИТИРУЮЩИХ КОЛЕЦ ГАУССА БЕЗ ЦЕНТРАЛЬНОГО ТЕЛА

Как отмечалось, кольца, наблюдаемые вокруг малых небесных тел, не имеют спутников-пастухов, и пока не известна главная причина, почему эти кольца являются узкими и имеют резкие границы. Наша модель представлена системой из двух колечек Гаусса, удобным малым параметром для которой является отношение ширины кольца к его среднему радиусу $\Delta a / a$. Поэтому уравнения эволюции оскулирующих элементов колец Гаусса в гравитационном поле друг друга, а также в поле центрального тела, после разложения по малым эксцентриситетам e_1 , e_2 и малому взаимному наклону $\Delta i'$, естественно раскладывать также по малому параметру относительной ширины кольца $\Delta a / a$.

2.1. Коллективные переменные в задаче эволюции 2D кольца

Уравнения эволюции двух колец Гаусса, полученные в работе Кондратьева и Корноухова [15], запишем здесь в других (коллективных) переменных. Ввод новых переменных связан с тем, что при изучении динамики системы двух колец удобно записывать уравнения эволюции не для каждого кольца в отдельности, а сразу для двух колец. С этой целью, для каждого оскулирующего элемента кольца x определим разность $\Delta x = x_2 - x_1$ и полусумму

$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$. Например, эксцентриситеты колец e_1 и e_2 будут представлены дифференциальным эксцентриситетом $\Delta e = e_2 - e_1$ и средним $e = \frac{e_1 + e_2}{2}$. Еще одно преимущество коллективных переменных в том, что в полученных комбинациях уравнений естественно появляется малый параметр $\frac{a_2 - a_1}{a} = \frac{\Delta a}{a}$.

Из геометрических соображений следует, что условие непересекаемости двух софокусных эллипсов с близкими по размерам полуосями

$$e_1 + e_2 < \frac{\Delta a}{a} \quad (1)$$

дает ограничение на средний арифметический эксцентриситет колец e

$$e_{\max} < \frac{\Delta a}{2a}, \quad (2)$$

а условие неотрицательности e дает ограничение сверху на абсолютное значение дифференциального эксцентриситета $|\Delta e|$

$$|\Delta e|_{\max} = 2e_{\max}. \quad (3)$$

Например, для эксцентриситета кольца Хаумеа с $a \approx 2300$ км и $\Delta a = 70$ км получим $e_{\max} \approx 0.015$.

2.2. Уравнения взаимной эволюции двух колец Гаусса. Общий случай: эллиптические кольца с наклоном

Для уравнений эволюции колец Гаусса из работы [15] напомним принятые обозначения (см. рис. 1): m/M — отношение масс кольца и центрального тела; $\Delta a/a$ — отношение ширины кольца к его среднему радиусу; $e_1, e_2, \Delta e = (e_2 - e_1)$ — эксцентриситеты колец и их разность; $\omega_1, \omega_2, \Delta\omega$ — аргументы перицентров и их разность; $\Delta\bar{\omega}_i$ — угол между линией узлов i -го кольца, лежащей в плоскости эклиптики, и общей линией узлов двух колец; $i_1, i_2, \Delta i = (i_2 - i_1)$ —

углы наклонов и их разность для колец Гаусса к плоскости первого кольца; $i'_1, i'_2, \Delta i' = (i'_2 - i'_1)$ — наклоны и их разность колец Гаусса к плоскости эклиптики; $\Omega'_1, \Omega'_2, \Delta\Omega' = (\Omega'_2 - \Omega'_1)$ — долготы и разность долгот восходящих узлов колец Гаусса в плоскости эклиптики.

Опираясь на указанные в [15] уравнения эволюции колец, после трудоемких выкладок, включающих в себя переход к новым коллективным переменным и разложения правых частей уравнений по малому параметру $\Delta a/a$ до четвертой степени включительно, в итоге получим следующие уравнения эволюции для дифференциальных и средних элементов двух колец Гаусса под взаимным гравитационным влиянием (производные всех величин в этом случае отмечены нижним индексом «г» от слова «ring»):

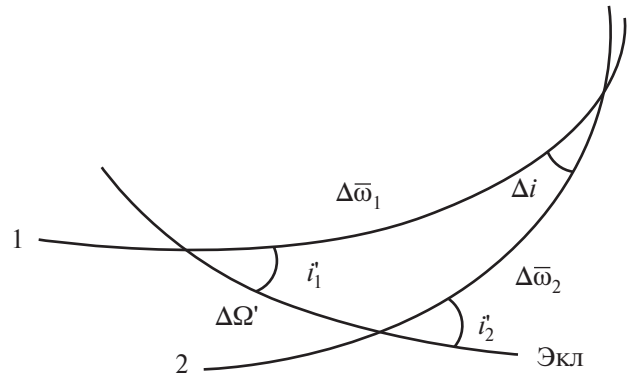


Рис. 1. Сферический треугольник в задаче о переходе к эклиптической системе координат. Здесь Δi — угол между кольцами Гаусса; $\Delta\Omega' = \Omega'_2 - \Omega'_1$ — разность долгот восходящих узлов колец Гаусса, отсчитываемая в плоскости эклиптики; i'_1 и i'_2 — наклоны, соответственно, первого и второго колец Гаусса к плоскости эклиптики; $\Delta\bar{\omega}_i$ — угол между линией узлов i -го кольца, лежащей в плоскости эклиптики, и общей линией узлов двух колец.

$$\left(\frac{d\Delta e}{dt} \right)_r = -\frac{3n}{16\pi} \left(\frac{\Delta a}{a} \right)^4 \frac{m}{M} \times \left\{ (e_1 + e_2) \sin[\Delta\omega - (\Delta\bar{\omega}_2 - \Delta\bar{\omega}_1)] \left[e_1^2 + e_2^2 - 2e_1e_2 \cos[\Delta\omega - (\Delta\bar{\omega}_2 - \Delta\bar{\omega}_1)] - \Delta i'^2 + \frac{4}{3} \left(\frac{\Delta a}{a} \right)^2 \right] \right. \\ \left. - 2\Delta i'^2 [\cos(\omega_1 - \Delta\bar{\omega}_1) + \cos(\omega_2 - \Delta\bar{\omega}_2)] [e_2 \sin(\omega_2 - \Delta\bar{\omega}_2) - e_1 \sin(\omega_1 - \Delta\bar{\omega}_1)] \right\}. \quad (4)$$

$$\left(\frac{de}{dt}\right)_r = -\frac{3n}{32\pi}\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^4 \frac{m}{M} \times \left\{ (e_1 - e_2) \sin[\Delta\omega - (\Delta\bar{\omega}_2 - \Delta\bar{\omega}_1)] \left[e_1^2 + e_2^2 - 2e_1e_2 \cos[\Delta\omega - (\Delta\bar{\omega}_2 - \Delta\bar{\omega}_1)] - \Delta i'^2 + \frac{4}{3}\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 \right] + 2\Delta i'^2 [\cos(\omega_1 - \Delta\bar{\omega}_1) - \cos(\omega_2 - \Delta\bar{\omega}_2)] [e_2 \sin(\omega_2 - \Delta\bar{\omega}_2) - e_1 \sin(\omega_1 - \Delta\bar{\omega}_1)] \right\}. \quad (5)$$

$$\left(\frac{d\Delta\omega}{dt}\right)_r = \frac{3n}{16\pi e_1 e_2 \sin i_1 \sin i_2} \left(\frac{\Delta a}{a}\right)^4 \frac{m}{M} \times \left\{ 2 \sin i_1 \sin i_2 \Delta i'^2 [e_2 \sin(\omega_1 - \Delta\bar{\omega}_1) + e_1 \sin(\omega_2 - \Delta\bar{\omega}_2)] [e_1 \sin(\omega_1 - \Delta\bar{\omega}_1) - e_2 \sin(\omega_2 - \Delta\bar{\omega}_2)] + e_1 e_2 \cos \Delta\Omega (\cos^2 i_1 - \cos^2 i_2) - \sin i_1 \sin i_2 \cos[\Delta\omega - (\Delta\bar{\omega}_2 - \Delta\bar{\omega}_1)] (e_1^2 - e_2^2) \cdot \left(e_1^2 + e_2^2 - 2e_1e_2 \cos[\Delta\omega - (\Delta\bar{\omega}_2 - \Delta\bar{\omega}_1)] - \Delta i'^2 + \frac{4}{3}\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 \right) - 2e_1e_2 \cos \Delta\Omega (\cos^2 i_1 - \cos^2 i_2) [e_1 \sin(\omega_1 - \Delta\bar{\omega}_1) - e_2 \sin(\omega_2 - \Delta\bar{\omega}_2)]^2 - e_1 e_2 \sin \Delta\Omega (\cos i_1 + \cos i_2) (\cos i_1 \cos i_2 - 1) \cdot e_1^2 \sin(2\omega_1 - 2\Delta\bar{\omega}_1) + e_2^2 \sin(2\omega_2 - 2\Delta\bar{\omega}_2) - 2e_1e_2 \sin[\Delta\omega - (\Delta\bar{\omega}_2 + \Delta\bar{\omega}_1)] \right\}. \quad (6)$$

$$\left(\frac{d\omega}{dt}\right)_r = -\frac{3n}{32\pi e_1 e_2 \sin i_1 \sin i_2} \left(\frac{\Delta a}{a}\right)^4 \frac{m}{M} \times \left\{ 2 \sin i_1 \sin i_2 \Delta i'^2 [e_2 \sin(\omega_1 - \Delta\bar{\omega}_1) - e_1 \sin(\omega_2 - \Delta\bar{\omega}_2)] \cdot [e_1 \sin(\omega_1 - \Delta\bar{\omega}_1) - e_2 \sin(\omega_2 - \Delta\bar{\omega}_2)] + \left(e_1 e_2 \cos \Delta\Omega (\sin^2 i_2 \cos^2 i_1 + \sin^2 i_1 \cos^2 i_2) - \sin i_1 \sin i_2 \cos[\Delta\omega - (\Delta\bar{\omega}_2 - \Delta\bar{\omega}_1)] (e_1^2 + e_2^2) - 2e_1e_2 (\cos i_1 \cos i_2 + 1) \right) \cdot \left(e_1^2 + e_2^2 - 2e_1e_2 \cos[\Delta\omega - (\Delta\bar{\omega}_2 - \Delta\bar{\omega}_1)] - \Delta i'^2 + \frac{4}{3}\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 \right) + 2e_1e_2 [e_1 \sin(\omega_1 - \Delta\bar{\omega}_1) - e_2 \sin(\omega_2 - \Delta\bar{\omega}_2)]^2 \cdot [\cos \Delta\Omega (\sin^2 i_2 \cos^2 i_1 + \sin^2 i_1 \cos^2 i_2) - 2 \sin i_1 \sin i_2 \cos i_1 \cos i_2] + e_1 e_2 \sin \Delta\Omega (\cos i_1 - \cos i_2) (\cos i_1 \cos i_2 + 1) \cdot [e_1^2 \sin(2\omega_1 - 2\Delta\bar{\omega}_1) + e_2^2 \sin(2\omega_2 - 2\Delta\bar{\omega}_2) - 2e_1e_2 \sin[\Delta\omega - (\Delta\bar{\omega}_2 + \Delta\bar{\omega}_1)]] \right\}. \quad (7)$$

$$\left(\frac{d\Delta i}{dt} \right)_r = \frac{3n}{16\pi} \left(\frac{\Delta a}{a} \right)^4 \frac{m}{M} \times \left\{ \begin{aligned} & \sin \Delta \Omega (\sin i_1 + \sin i_2) \cdot \\ & \left(e_1^2 + e_1^2 - 2e_1 e_2 \cos(\Delta \omega - (\Delta \bar{\omega}_2 - \Delta \bar{\omega}_1)) + 2(\sin(\omega_2 - \Delta \bar{\omega}_2)e_2 - \sin(\omega_1 - \Delta \bar{\omega}_1)e_1)^2 \right) \\ & - \Delta i'^2 + \frac{4}{3} \left(\frac{\Delta a}{a} \right)^2 \\ & - (1 + \cos \Delta \Omega) \sin \Delta i (\sin(2\omega_1 - 2\Delta \bar{\omega}_1)e_1^2 + \sin(2\omega_2 - 2\Delta \bar{\omega}_2)e_2^2 - 2e_1 e_2 \sin(2\omega - (\Delta \bar{\omega}_1 + \Delta \bar{\omega}_2))) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\left(\frac{di}{dt} \right)_r = \frac{3n}{32\pi} \left(\frac{\Delta a}{a} \right)^4 \frac{m}{M} \times \left\{ \begin{aligned} & \sin \Delta \Omega (\sin i_1 - \sin i_2) \cdot \\ & \left(e_1^2 + e_1^2 - 2e_1 e_2 \cos(\Delta \omega - (\Delta \bar{\omega}_2 - \Delta \bar{\omega}_1)) + 2(\sin(\omega_2 - \Delta \bar{\omega}_2)e_2 - \sin(\omega_1 - \Delta \bar{\omega}_1)e_1)^2 \right) \\ & - \Delta i'^2 + \frac{4}{3} \left(\frac{\Delta a}{a} \right)^2 \\ & - (1 - \cos \Delta \Omega) \sin 2i (\sin(2\omega_1 - 2\Delta \bar{\omega}_1)e_1^2 + \sin(2\omega_2 - 2\Delta \bar{\omega}_2)e_2^2 - 2e_1 e_2 \sin(2\omega - (\Delta \bar{\omega}_1 + \Delta \bar{\omega}_2))) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\left(\frac{d\Omega}{dt} \right)_r = -\frac{3n}{32\pi \sin i_1 \sin i_2} \left(\frac{\Delta a}{a} \right)^4 \frac{m}{M} \times \left\{ \begin{aligned} & (\cos i_1 \cos i_2 \cos \Delta \Omega + \sin i_1 \sin i_2 - \cos \Delta \Omega) (\cos i_1 + \cos i_2) \cdot \\ & \left(e_1^2 + e_2^2 - 2e_1 e_2 \cos[\Delta \omega - (\Delta \bar{\omega}_2 - \Delta \bar{\omega}_1)] + 2[e_2 \sin(\omega_2 - \Delta \bar{\omega}_2) - e_1 \sin(\omega_1 - \Delta \bar{\omega}_1)]^2 - \right. \\ & \left. - \Delta i'^2 + \frac{4}{3} \left(\frac{\Delta a}{a} \right)^2 \right) + \sin \Delta \Omega (\sin^2 i_1 - \sin^2 i_2) \cdot \\ & \cdot [e_1^2 \sin(2\omega_1 - 2\Delta \bar{\omega}_1) + e_2^2 \sin(2\omega_2 - 2\Delta \bar{\omega}_2) - 2e_1 e_2 \sin(2\omega - (\Delta \bar{\omega}_1 + \Delta \bar{\omega}_2))] \end{aligned} \right\}. \quad (10)$$

$$\left(\frac{d\Delta \Omega}{dt} \right)_r = -\frac{3n}{16\pi \sin i_1 \sin i_2} \left(\frac{\Delta a}{a} \right)^4 \frac{m}{M} \times \left\{ \begin{aligned} & (\cos i_1 \cos i_2 \cos \Delta \Omega + \sin i_1 \sin i_2 + \cos \Delta \Omega) (\cos i_1 - \cos i_2) \cdot \\ & \left(e_1^2 + e_2^2 - 2e_1 e_2 \cos[\Delta \omega - (\Delta \bar{\omega}_2 - \Delta \bar{\omega}_1)] + 2[e_2 \sin(\omega_2 - \Delta \bar{\omega}_2) - e_1 \sin(\omega_1 - \Delta \bar{\omega}_1)]^2 - \right. \\ & \left. - \Delta i'^2 + \frac{4}{3} \left(\frac{\Delta a}{a} \right)^2 \right) + \sin \Delta \Omega (\sin^2 i_1 + \sin^2 i_2) \cdot \\ & \cdot [e_1^2 \sin(2\omega_1 - 2\Delta \bar{\omega}_1) + e_2^2 \sin(2\omega_2 - 2\Delta \bar{\omega}_2) - 2e_1 e_2 \sin(2\omega - (\Delta \bar{\omega}_1 + \Delta \bar{\omega}_2))] \end{aligned} \right\}. \quad (11)$$

*2.3. Первый частный случай в задаче 1:
уравнения эволюции (4–11) для компланарных эллиптических колец*

Если оба эллиптических кольца лежат в одной плоскости, тогда

$$i_1 = i_2 = \Delta i = 0; i'_1 = i'_2 = \Delta i' = 0; \Delta \omega_1 = \Delta \omega_2; \Delta \Omega = 0, \quad (12)$$

и уравнения (4–11) допускают заметные упрощения:

$$\left(\frac{d\Delta\bar{\omega}}{dt}\right)_r = -\frac{3n}{8\pi\left(e^2 - \frac{\Delta e^2}{4}\right)}\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^4 \frac{m}{M} \Delta e \cos \Delta\bar{\omega} \times \left[2e^2(1 - \cos \Delta\bar{\omega}) + \frac{\Delta e^2}{2}(1 - \cos \Delta\bar{\omega}) + \frac{4}{3}\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2\right]. \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\bar{\omega}}{dt}\right)_r &= -\frac{3n}{16\pi\left(e^2 - \frac{\Delta e^2}{4}\right)}\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^4 \frac{m}{M} \left(2e^2(1 - \cos \Delta\bar{\omega}) - \frac{\Delta e^2}{2}(1 + \cos \Delta\bar{\omega})\right) \times \\ &\times \left[2e^2(1 - \cos \Delta\bar{\omega}) + \frac{\Delta e^2}{2}(1 + \cos \Delta\bar{\omega}) + \frac{4}{3}\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2\right]. \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\Delta e}{dt}\right)_r &= -\frac{3n}{8\pi\left(e^2 - \frac{\Delta e^2}{4}\right)}\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^4 \frac{m}{M} e \sin \Delta\bar{\omega} \times \quad (15) \\ \left(\frac{de}{dt}\right)_r &= -\frac{3n}{32\pi\left(e^2 - \frac{\Delta e^2}{4}\right)}\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^4 \frac{m}{M} \Delta e \sin \Delta\bar{\omega} \times \quad (16) \\ &\times \left[2e^2(1 - \cos \Delta\bar{\omega}) + \frac{\Delta e^2}{2}(1 - \cos \Delta\bar{\omega}) + \frac{4}{3}\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2\right]. \quad \times \left[2e^2(1 - \cos \Delta\bar{\omega}) + \frac{\Delta e^2}{2}(1 - \cos \Delta\bar{\omega}) + \frac{4}{3}\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2\right]. \end{aligned}$$

*2.4. Второй частный случай в задаче 1: уравнения (4–11)
для описания взаимной эволюции круглых колец с наклоном*

В этом случае:

$$e_1 = e_2 = \Delta e = 0; \omega_1 = \omega_2 = \Delta \omega_1 = \Delta \omega_2 = 0, \quad (17)$$

и уравнения (4–11) также допускают упрощения:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\Delta\Omega}{dt}\right)_r &= -\frac{3n}{16\pi \sin i_1 \sin i_2} \left(\frac{\Delta a}{a}\right)^4 \frac{m}{M} \times \\ &\times (\cos i_1 \cos i_2 \cos \Delta\Omega + \sin i_1 \sin i_2 + \cos \Delta\Omega)(\cos i_1 - \cos i_2) \left(\frac{4}{3}\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 - \Delta i'^2\right). \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\Omega}{dt}\right)_r &= -\frac{3n}{32\pi \sin i_1 \sin i_2} \left(\frac{\Delta a}{a}\right)^4 \frac{m}{M} \times \\ &\times (\cos i_1 \cos i_2 \cos \Delta\Omega + \sin i_1 \sin i_2 - \cos \Delta\Omega)(\cos i_1 + \cos i_2) \left(\frac{4}{3}\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 - \Delta i'^2\right). \end{aligned} \quad (19)$$

$$\left(\frac{d\Delta i}{dt}\right)_r = \frac{3n}{16\pi} \left(\frac{\Delta a}{a}\right)^4 \frac{m}{M} \times \sin \Delta\Omega (\sin i_1 + \sin i_2) \left(\frac{4}{3}\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 - \Delta i'^2\right). \quad (20)$$

$$\left(\frac{di}{dt}\right)_r = \frac{3n}{32\pi} \left(\frac{\Delta a}{a}\right)^4 \frac{m}{M} \times \sin \Delta \Omega (\sin i_1 - \sin i_2) \left(\frac{4}{3} \left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 - \Delta i'^2 \right). \quad (21)$$

Таким образом, в задаче о взаимной эволюции колец без центрального тела в общем случае имеем систему (4–11) из 8 дифференциальных уравнений. В частных случаях для компланарных эллиптиче-

ских колец система сводится к 4 уравнениям эволюции (13–16)), а в случае круглых колец с наклоном — к 4 уравнениям эволюции (18–21).

3. ЗАДАЧА 2. УРАВНЕНИЯ ЭВОЛЮЦИИ КОЛЕЦ ГАУССА ПОД ВЛИЯНИЕМ ЦЕНТРАЛЬНОГО ТЕЛА

Большой интерес представляет задача эволюции колец в гравитационном поле центрального тела. Здесь мы рассматриваем случай, когда центральное тело не имеет осевой симметрии и быстро вращается и самогравитация колец отсутствует. Все производные в этом случае отмечены нижним индексом «с».

3.1. Азимутально усредненный потенциал центрального тела

Как известно [6, 16], внешний потенциал центрального тела, не имеющего ротационной симметрии, можно представить в виде ряда по сферическим гармоникам

$$\varphi(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{r} \left\{ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R_0}{r}\right)^n P_{nm}(\sin \theta) [C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda] \right\}, \quad (22)$$

где r , θ и λ есть радиус, широта и долгота, R_0 есть наибольший экваториальный радиус тела, P_{nm} — присоединенные полиномы Лежандра, C_{nm} и S_{nm} есть коэффициенты потенциала, ко-

торые определяются через распределение масс внутри тела. В случае трехосного эллипсоида, ограничиваясь членами четвертого порядка, имеем:

$$\begin{aligned} \varphi(r, \theta, \lambda) \approx \frac{GM}{r} \left\{ 1 + \left(\frac{R_0}{r}\right)^2 \left[\frac{C_{20}}{2} (3 \sin^2 \theta - 1) + 3C_{22} \cos^2 \theta \cos 2\lambda \right] + \right. \\ \left. + \left(\frac{R_0}{r}\right)^4 \left[\frac{C_{40}}{8} (35 \sin^4 \theta - 30 \sin^2 \theta + 3) + \frac{15C_{42}}{2} (7 \sin^2 \theta - 1) \cos 2\lambda + 105C_{44} \cos^4 \theta \cos 4\lambda \right] \right\}. \end{aligned} \quad (23)$$

Так как в нашей задаче центральный эллипсоид с полуосями $a_1 > a_2 > a_3$ совершает быстрое вращение вокруг малой оси, то для изучения вековых эффектов в движении частиц кольца необходимо

усреднить потенциал (23) по λ в интервале $(0, 2\pi)$. При таком усреднении в (23) исчезнут все члены, содержащие $\cos 2\lambda$ и $\cos 4\lambda$, и в цилиндрических координатах (r, z) потенциал примет вид [17]

$$\varphi(r, z) \approx \frac{GM}{r} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} C_{20} \left(\frac{R_0}{r}\right)^2 \left(3 \cdot \left(\frac{z}{r}\right)^2 - 1 \right) + \frac{1}{8} C_{40} \left(\frac{R_0}{r}\right)^4 \left(35 \cdot \left(\frac{z}{r}\right)^4 - 30 \cdot \left(\frac{z}{r}\right)^2 + 3 \right) \right), \quad (24)$$

где z есть высота пробной частицы над плоскостью условного экватора. Зональные коэффициенты C_{20} и C_{40} в потенциале (24) равны:

$$C_{20} = \frac{2a_3^2 - a_1^2 - a_2^2}{10R_0^2}; \quad C_{40} = 3 \frac{3(a_1^4 + a_2^4) + 8a_3^4 + 2a_1^2 a_2^2 - 8(a_1^2 + a_2^2)a_3^2}{140R_0^4}. \quad (25)$$

3.2. Уравнения вековой эволюции кольца в усредненном центральном поле

На первом этапе, подставляя потенциал (24) в уравнения Лагранжа для оскулирующих элементов, получим систему дифференциальных уравнений [17]:

$$\begin{aligned}\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{3}{2} C_{20} n \left(\frac{R}{a}\right)^2 \frac{\cos i}{(1-e^2)^2}; \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{3}{5} C_{20} n \left(\frac{R}{a}\right)^2 \frac{5\cos^2 i - 1}{(1-e^2)^2}; \\ \frac{de}{dt} &= \frac{15}{16} C_{40} n \left(\frac{R}{a}\right)^4 \frac{\sin^2 i (7\cos^2 i - 1)}{(1-e^2)^3} e \sin \omega \cos \omega; \\ \frac{di}{dt} &= \frac{15}{16} C_{40} n \left(\frac{R}{a}\right)^4 \frac{\sin i \cos i (7\cos^2 i - 1)}{(1-e^2)^4} e^2 \sin \omega \cos \omega,\end{aligned}\quad (26)$$

где $n = \sqrt{\frac{GM}{a^3}}$ — среднее движение точечной массы m по своей орбите.

Замечание 1. В первых двух уравнениях (26) мы исключили слагаемые с коэффициентом C_{40} в виду их относительной малости в сравнении с присутствующими там слагаемыми с коэффициентом C_{20} . В третьем и четвертом уравнениях (26) слагаемые с коэффициентом C_{40} оставлены, поскольку члены C_{20} там отсутствуют.

3.3. Общий случай: запись в коллективных переменных уравнений (26) для двух эллиптических колец с наклоном в центральном поле

Затем, опираясь на уравнения (26), в коллективных переменных для задачи 2 получим систему из 8 уравнений:

$$\left(\frac{d\Delta\omega}{dt}\right)_c = -\frac{3}{16} C_{20} n \left(\frac{R}{a}\right)^2 \left(20(\cos^2 i_2 - \cos^2 i_1) - 7\frac{\Delta a}{a}(5(\cos^2 i_2 + \cos^2 i_1) - 2)\right); \quad (27)$$

$$\left(\frac{d\omega}{dt}\right)_c = -\frac{3}{8} C_{20} n \left(\frac{R}{a}\right)^2 \left(5(\cos^2 i_2 + \cos^2 i_1) - 2 - \frac{35}{4}\frac{\Delta a}{a}(\cos^2 i_2 - \cos^2 i_1)\right); \quad (28)$$

$$\left(\frac{d\Delta e}{dt}\right)_c = -\frac{15}{32} C_{40} n \left(\frac{R}{a}\right)^4 \left(\sin^2 i_1 \sin 2\omega_1 (7\cos^2 i_1 - 1)e_1 - \sin^2 i_2 \sin 2\omega_2 (7\cos^2 i_2 - 1)e_2\right); \quad (29)$$

$$\left(\frac{de}{dt}\right)_c = \frac{15}{64} C_{40} n \left(\frac{R}{a}\right)^4 \left(\sin^2 i_1 \sin 2\omega_1 (7\cos^2 i_1 - 1)e_1 + \sin^2 i_2 \sin 2\omega_2 (7\cos^2 i_2 - 1)e_2\right); \quad (30)$$

$$\left(\frac{d\Delta\Omega}{dt}\right)_c = -\frac{3}{8} C_{20} n \left(\frac{R}{a}\right)^2 \left(4(\cos i_1 - \cos i_2) - 7\frac{\Delta a}{a}(\cos i_1 + \cos i_2)\right); \quad (31)$$

$$\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)_c = \frac{3}{16} C_{20} n \left(\frac{R}{a}\right)^2 \left(4(\cos i_1 + \cos i_2) - 7\frac{\Delta a}{a}(\cos i_1 - \cos i_2)\right); \quad (32)$$

$$\left(\frac{d\Delta i}{dt}\right)_c = \frac{15}{64} C_{40} n \left(\frac{R}{a}\right)^4 \left(\frac{\sin 2i_1 \sin 2\omega_1 (7\cos^2 i_1 - 1)e_1^2 - \sin 2i_2 \sin 2\omega_2 (7\cos^2 i_2 - 1)e_2^2 + \frac{11}{4}\frac{\Delta a}{a}(\sin 2i_1 \sin 2\omega_1 (7\cos^2 i_1 - 1)e_1^2 + \sin 2i_2 \sin 2\omega_2 (7\cos^2 i_2 - 1)e_2^2)}{\right); \quad (33)$$

$$\left(\frac{di}{dt}\right)_c = -\frac{15}{128} C_{40} n \left(\frac{R}{a}\right)^4 \left(\frac{\sin 2i_1 \sin 2\omega_1 (7\cos^2 i_1 - 1)e_1^2 + \sin 2i_2 \sin 2\omega_2 (7\cos^2 i_2 - 1)e_2^2 + \frac{11}{4}\frac{\Delta a}{a}(\sin 2i_1 \sin 2\omega_1 (7\cos^2 i_1 - 1)e_1^2 - \sin 2i_2 \sin 2\omega_2 (7\cos^2 i_2 - 1)e_2^2)}{\right). \quad (34)$$

3.4. Первый частный случай в задаче 2:
запись уравнений (27–34) для компланарных эллиптических колец

$$\left(\frac{d\Delta\bar{\omega}}{dt}\right)_c = \frac{21}{4}C_{20}n\left(\frac{R}{a}\right)^2\frac{\Delta a}{a}; \quad (35) \quad \left(\frac{d\bar{\omega}}{dt}\right)_c = -\frac{3}{2}C_{20}n\left(\frac{R}{a}\right)^2; \quad (36) \quad \left(\frac{d\Delta e}{dt}\right)_c = \left(\frac{de}{dt}\right)_c = 0. \quad (37)$$

3.5. Второй частный случай в задаче 2: круглые кольца с наклоном

В этом случае также имеем три уравнения:

$$\left(\frac{d\Delta\Omega}{dt}\right)_c = -\frac{3}{8}C_{20}n\left(\frac{R}{a}\right)^2\left(4(\cos i_1 - \cos i_2) - 7\frac{\Delta a}{a}(\cos i_1 + \cos i_2)\right); \quad (38)$$

$$\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)_c = \frac{3}{16}C_{20}n\left(\frac{R}{a}\right)^2\left(4(\cos i_1 + \cos i_2) - 7\frac{\Delta a}{a}(\cos i_1 - \cos i_2)\right); \quad (39)$$

$$\left(\frac{d\Delta i}{dt}\right)_c = \left(\frac{di}{dt}\right)_c = 0. \quad (40)$$

4. СТАБИЛЬНОСТЬ ГРАНИЦ УЗКИХ 2D КОЛЕЦ

Согласно наблюдениям [4], кольцо вокруг Хаумеа является тонким ($\frac{\Delta a}{a} \approx 0.03$) и имеет резкие границы. Для описания этого кольца обратимся к составной модели из двух граничных колец Гаусса. Тогда масса кольца есть сумма масс этих граничных колечек. Сохранению формы кольца с его резкими границами будут способствовать два фактора:

- а) самогравитация системы из двух граничных колец Гаусса;
- б) эволюция этой системы колец в гравитационном поле центрального тела.

Важными для обеспечения стабилизации кольца являются критерии равенства нулю дифференциальных оскулирующих элементов.

Запишем этот критерий в частных случаях.

4.1. Стабилизация в случае круглых колец с наклоном

Для случая круглых наклонных колец сформулированный выше критерий удержания дает

$$\left(\frac{d\Delta i}{dt}\right)_r + \left(\frac{di}{dt}\right)_c = 0, \quad \left(\frac{d\Delta\Omega}{dt}\right)_r + \left(\frac{d\Omega}{dt}\right)_c = 0. \quad (41)$$

4.2. Стабилизация для случая компланарных эллиптических колец

Пренебрегая наклоном кольца Хаумеа к экваториальной плоскости, рассмотрим условия стабилизации кольца Хаумеа в модели 2D кольца:

$$\left(\frac{d\Delta e}{dt}\right)_r + \left(\frac{de}{dt}\right)_c = 0, \quad \left(\frac{d\Delta\bar{\omega}}{dt}\right)_r + \left(\frac{d\bar{\omega}}{dt}\right)_c = 0. \quad (42)$$

Критерий для компланарных эллиптических колец дает следующее решение для угла между линиями аписид

$$\Delta\bar{\omega} = 0. \quad (43)$$

5. ПРЕЦЕССИЯ И МАССА КОЛЬЦА ХАУМЕА

Критерии стабилизации для круглых наклонных колец (41) дают следующее решение для угла между линиями узлов

$$\Delta\Omega' = 0, \quad (44)$$

поэтому из соотношений для сферического треугольника на рис. 1 следует равенство разностей углов наклона в обоих используемых в задаче системах отсчета

$$\Delta i' = \Delta i. \quad (45)$$

Тогда график зависимости отношения массы кольца Хаумеа m к массе самой Хаумеа M от разности между углами наклона границ кольца Хаумеа Δi будет иметь две области, см. рис. 2, где физически приемлемой является правая область этого графика.

Замечание 2. Причиной появления разрыва между двумя графиками на рис. 2 является то, что, согласно критерию (43), на этом интервале масса m оказывается меньше нуля. Выбор же правого графика из двух объясняется тем, что именно на интервале наклонов ($0^\circ, 2^\circ$) находится кольцо Хаумеа [13, 17].

График на рис. 3 описывает прецессию кольца Хаумеа в плоскости ее экватора.

Заметим, что без учета самогравитации уравнение для частоты прецессии узла кольца в поле центрального тела имеет вид (см. Кондратьев и Корноухов [17])

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{3}{2} C_{20} \cdot n \cdot \left(\frac{R_0}{a} \right)^2 \frac{\cos i}{(1-e^2)^2}. \quad (46)$$

Для Хаумеа это уравнение дает

$$\frac{d\Omega}{dt} = (-5.7 \pm 0.3) \cdot 10^{-6} \text{ sec}^{-1}, \quad (47)$$

так что период прецессии узла для кольца этой карликовой планеты будет равен

$$T_\Omega = 12.9 \pm 0.7 d. \quad (48)$$

На рис. 4 приведен график зависимости отношения масс кольца и центрального тела от дифференциального эксцентриситета (кольца компланарные) при максимально допустимом среднем арифметическом эксцентриситете; при меньших значениях среднего арифметического эксцентриситета отношение масс оказывается еще меньше.

Как видно в компланарной модели оценки массы кольца Хаумеа оказываются на порядок меньше, чем в модели круглых колец с наклоном, но при этом есть общая область значений при определенных параметрах.

С учетом известной из наблюдений [4] непрозрачности $\tau \approx 0.5$ и размеров частиц d_0 кольца число этих частиц будет оцениваться с помощью формулы

$$N = \frac{2r\Delta r}{d_0^2} \tau, \quad (49)$$

а средняя масса частицы m_0

$$m_0 = \frac{4\pi}{3} \rho d_0^3, \quad (50)$$

откуда масса кольца m будет равна

$$m = Nm_0 = \frac{8\pi}{3} \rho \tau r \Delta r d_0. \quad (51)$$

Частицы кольца должны состоять предположительно из льда, поэтому оценим плотность частиц $\rho = 1 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$. Тогда отношение массы кольца Хаумеа

к массе самой Хаумеа будет функцией радиуса средней частицы d_0

$$\frac{m}{M} = 1.7 \cdot 10^{-6} \text{ см}^{-3} d_0 (\text{см}). \quad (52)$$

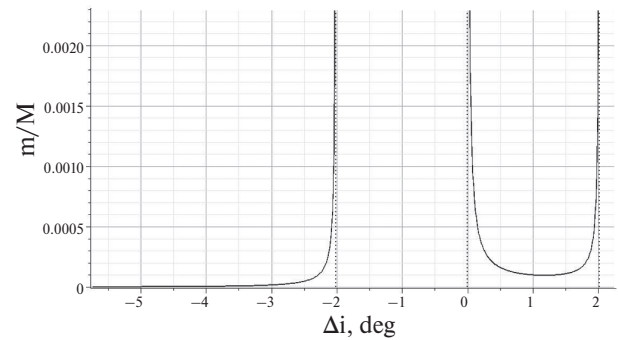


Рис. 2. График зависимости отношения массы кольца Хаумеа m к массе самой Хаумеа M от разности между углами наклона Δi круглых границ кольца Хаумеа.

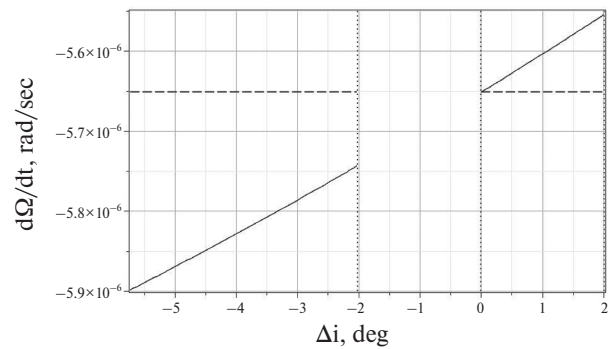


Рис. 3. Прецессия линии узлов $\frac{d\Omega}{dt}$ кольца Хаумеа в плоскости экватора центрального тела в зависимости от разности углов наклона границ этого кольца Δi . Штрихованной линией обозначено значение угловой скорости без учета самогравитации кольца Хаумеа (см. формулу (45)).

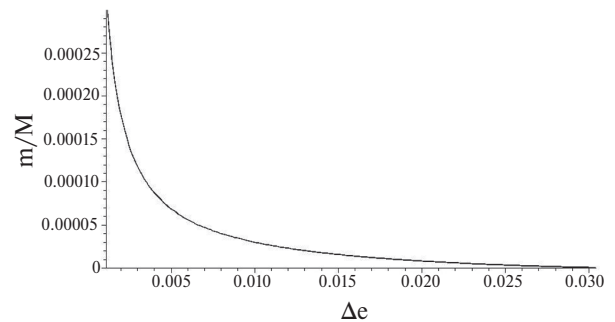


Рис. 4. Отношение массы кольца Хаумеа m к массе самой Хаумеа M в зависимости от разности эксцентриситетов границ этого кольца Δe , при максимальном среднем арифметическом эксцентриситете этих двух границ $e = e_{\max}$.

Эта функциональная зависимость отношения масс кольца и центрального тела позволяет оценить размеры частиц кольца. В модели с наклонными круглыми кольцами размеры ледяных частиц получаются порядка 1 метра.

6. ОБСУЖДЕНИЕ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Замечательной особенностью колец, открытых недавно вокруг малых небесных тел, является то, что эти кольца узкие и имеют резкие границы. При этом спутников-пастухов, которые могли бы отвечать за сохранение границ этих колец, не обнаружено. Для объяснения указанного противоречия необходимо принять во внимание много факторов и, главное, построить довольно сложный математических аппарат, позволяющий учитывать самогравитацию колец.

В данной работе изучается вековая эволюция узких колец непланетного типа. В основе нашего подхода — представление 2D кольца системой из двух близких 1D колец Гаусса (колечек), что позволяет эффективно учесть самогравитацию составного кольца. Опираясь на метод взаимной энергии, мы рассмотрели здесь две основные задачи: задачу 1 — для взаимно гравитирующих колец Гаусса без центрального тела, и задачу 2 — для гравитирующих колец в азимутально усредненном потенциале центрального трехосного тела.

С математической точки зрения основной результат работы заключается в выводе для этих двух задач уравнений эволюции составного 2D кольца в новых коллективных переменных. Особенностью метода является то, что взаимная гравитационная энергия колечек W_{mut} представлена в виде ряда с точностью до 4-й степени малых эксцентриситетов и взаимного наклона колец. С той же точностью, с помощью данной функции W_{mut} выводятся и уравнения эволюции колец. В первой задаче (без центрального тела) в общем случае вековая эволюция описывается системой из восьми дифференциальных уравнений, правые части которых представлены усеченным рядом по степеням малого отношения $\Delta a / a$. Проведен анализ этих уравнений и, кроме общего случая, рассмотрены частные случаи: случай компланарных эллиптических колец (4 уравнения эволюции) и случай круглых колец с наклоном (также 4 уравнения эволюции).

Отдельно рассмотрена вторая задача, где изучается эволюция эллиптических колец в азимутально усредненном потенциале вращающегося трехосного

тела; здесь также получена система уравнений эволюции. Частными случаями здесь, как и в задаче 1, являются вариант компланарных эллиптических колец (два уравнения и две константы), и вариант круглых колец с наклоном (два уравнения и две константы).

Данные методы применяются для изучения динамики кольца карликовой планеты Хаумеа. Без учета самогравитации время нодальной прецессии кольца Хаумеа равно $T_{\Omega} = 12.9 \pm 0.7d$. Однако учет самогравитации кольца уменьшает период прецессии узлов.

Важный вывод разработанного подхода состоит в том, что поправка за самогравитацию действительно способствует сохранению формы кольца без привлечения гипотезы о спутниках-пастухах. На примерах эллиптических компланарных колец Гаусса, а также круговых колец с наклоном к экватору, были получены критерии сохранения формы 2D колец. Это позволило оценить массу колец m . Для кольца Хаумеа метод круглых колец дает $\frac{m}{M} \sim 10^{-3}$, а метод компланарных эллиптических колец $\frac{m}{M} \sim 10^{-4}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Н. Н. Горькавый, А. М. Фридман* Физика планетных колец (М.: Наука, 1995).
2. *D. Bérard, B. Sicardy, M. Assafin, F. Braga-Ribas, J. Camargo, M. R. Vieira, R. Duffard, J. L. Ortiz, C. Snodgrass, E. Jehin, et al.*, American Astronomical Society, DPS meeting 47, 104.02 (2015).
3. *F. Braga-Ribas, B. Sicardy, J. L. Ortiz, et al.*, Nature 508, 72 (2014).
4. *J. L. Ortiz, P. Santos-Sanz, B. Sicardy, G. Benedetti-Rossi, D. Bérard, N. Morales, R. Duffard, F. Braga-Ribas, U. Hopp, C. Ries, et al.*, Nature 550, 7675, 219 (2017).
5. *C. L. Pereira, B. Sicardy, B. E. Morgado, et al.*, Astron. and Astrophys. 673, L4 (2023).
6. *М. Ф. Субботин* Введение в теоретическую астрономию (М.: Наука, 1968).
7. *B. P. Kondratyev*, Sol. Sys. Res. 46, № 5, 352 (2012).
8. *P. Goldreich and S. Tremaine*, Astron. J. 84, 1638 (1979).
9. *P. Goldreich and S. Tremaine*, Annu. Rev. Astron. and Astrophys. 20, 249 (1982).
10. *N. Borderis, P. Goldreich, S. Tremaine*, Astron. J. 88, 1560 (1983).
11. *J. R. Tóma, S. Tremaine, M. V. Kazandjian*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 394, 1085 (2009).

12. B. P. Kondratyev, *Astrophys. and Space Sci.* 361, 169K (2016).
13. B. P. Kondratyev, V. S. Kornoukhov, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* 478, 3159–3176 (2018).
14. P. Kondratyev, V. S. Kornoukhov, *Tech. Phys.* 64, № 10, 1395 (2019).
15. Б. П. Кондратьев, В. С. Корноухов, *Астрон. журн.* 97, № 5, 408 (2020).
16. Г. Н. Дубошин *Небесная механика. Основные задачи и методы* (М.: Наука, 1975).
17. Б. П. Кондратьев, В. С. Корноухов, *Астрон. журн.* 97, № 10, 866–872 (2020).

SECULAR EVOLUTION AND STABILITY OF RINGS AROUND ROTATIONALLY ASYMMETRICAL BODIES. REVISITING THE PROBLEM

B. P. Kondratyev^{1,2,3,*}, V. S. Kornoukhov^{1,2}

¹*Faculty of Physics, Moscow State University, Moscow, Russia*

²*Sternberg Astronomical Institute, Moscow State University, Moscow, Russia*

³*Central (Pulkovo) Astronomical Observatory, Russian Academy of Sciences, St. Petersburg, Russia*

*E-mail: work@boris-kondratyev.ru

A method has been developed for studying the secular evolution and stabilization of the shape of rings in small celestial bodies that do not have shepherd satellites. A model of a compound ring consisting of two close, generally non-coplanar elliptical Gaussian rings has been constructed. The self-gravitation of the ring is taken into account through the mutual gravitational energy of the boundary rings. The function is presented as a series with an accuracy of up to the 4th power of small eccentricities and mutual inclination of the rings. The secular evolution of a compound ring is described by differential equations in special (collective) variables. For rings without a central body (problem 1), a closed system of 8 differential equations is obtained using the mutual energy function. The evolution of rings in the azimuthally averaged potential of a rotating triaxial body is also studied (problem 2); a second system of eight differential equations is derived for it. In both problems, in addition to the general case, two particular ones are considered: i) the case of coplanar elliptical rings, and ii) the case of circular rings with a tilt. The theory is applied to study the recently discovered ring of the dwarf planet Haumea. It is shown that without taking into account self-gravity, the nodal precession time of the Haumea ring is equal to but taking into account the self-gravity of the ring can reduce this period. It is established that self-gravity does indeed contribute to the preservation of the ring shape without invoking the hypothesis of shepherd satellites. Criteria for the preservation of the ring shape are obtained, which made it possible to estimate the interval for the ratio of the ring mass to the mass of Haumea. Taking into account the optical thickness of the ring, it is shown that the Haumea ring with a mass can consist of ice particles of size $d_0 \approx 0.7 \div 1$ m.

Keywords: non-planetary rings and their stability, self-gravity of rings, Gaussian rings and their mutual energy, azimuthally averaged potential of the central body, equations of secular evolution of rings, dwarf planet Haumea