АСТРОНОМИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2024, том 101, № 5, с. 390–407

КОНСТРУИРОВАНИЕ ЭНТРОПИЙНО-СИЛОВОЙ МОДЕЛИ РАСШИРЕНИЯ ВСЕЛЕННОЙ, ОБУСЛОВЛЕННОГО ГРАВИТАЦИОННО-ИНДУЦИРОВАННЫМ ПРОИЗВОДСТВОМ ТЕМНОЙ МАТЕРИИ

© 2024 г. М. Я. Маров[1], А. В. Колесниченко[2,*]

[1]Институт геохимии и аналитической химии им. В. И. Вернадского, РАН, Москва, Россия

[2]Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия

*E-mail: al-vl-kolesn@yandex.ru

Поступила в редакцию 15.12.2023 г.
После доработки 13.02.2024 г.
Принята в печать 11.03.2024 г.

В рамках энтропийной космологии и гравитационной теории Пригожина о связи геометрии и материи, обеспечивающей производство частиц в космологической жидкости, а также в предположении обменной энтропии на событийном горизонте сконструирована одножидкостная модель эволюции пространственно плоской, однородной и изотропной Вселенной. Для ее построения выведено из первого закона термодинамики уравнение сохранения энергии с учетом гравитационно-индуцированного создания материи и обменных энергетических процессов на видимом горизонте Вселенной. На основе энергетического уравнения и фундаментального уравнения Фридмана, описывающего расширение Вселенной, сконструированы в контексте энтропийного формализма модифицированные уравнения Фридмана-Робертсона-Уокера, предназначенные для моделирования различных динамических аспектов эволюции Вселенной с учетом адиабатического создания материи. При их получении было использовано несколько форм обменных феноменологических неэкстенсивных энтропий, ассоциированных с областью видимого космологического горизонта. Полученная эволюционная модель, согласующаяся со стандартной Λ-моделью для холодной темной материи, предназначена для описания без введения новых полей ускоренного расширения поздней Вселенной, обеспечивая ее космологическую историю.

Ключевые слова: общая теория относительности Энштейна, энтропийная космология, неэкстенсивная обменная энтропия, гравитационно-индуцированное создание материи

DOI: 10.31857/S0004629924050019 **EDN:** JODZJQ

1. ВВЕДЕНИЕ

Несмотря на растущее количество наблюдательных свидетельств существования ускоренного расширения Вселенной, его природа и фундаментальное происхождение все еще остается нерешенным вопросом. Для объяснения этого явления в ранних моделях ΛCDM (*lambda cold dark matter*) вводился дополнительный энергетический компонент, называемый темной энергией (плотность которого в настоящее время связывают с космологической постоянной Λ). Вследствие инвариантности Лоренца последняя характеризуется отрицательным давлением, что объясняет современное состояние ускоренного расширения. С учетом дополнительного параметра Λ стандартная модель ΛCDM довольно хорошо согласуется с современными астрономическими данными, полученными от сверхновых типа Ia, акустических осцилляций барионов (BAO) и космического микроволнового фона (CMB).

Однако существуют и серьезные недостатки этого подхода, связанные с чрезвычайно малым значением параметра Λ. Попытки связать его с плотностью энергии вакуума приводят к расхождению на 120 порядков относительно его теоретического значения, оцененного квантовой теорией поля. Для разрешения указанной несогласованности были предложены многочисленные космологические модели $\Lambda(t)$CDM, допускающие перевод космологической постоянной в поле $\Lambda(t)$, которое изменяется со временем подходящим образом. В рамках этих моделей были разработаны, в частности, различные сценарии эволюции Вселенной, основанные на ассоциированной с ее видимым горизонтом энтропии Бекенштейна-Хокинга $S_{\mathrm{B-H}}$ [1, 2] и на голографическом принципе, связанном с хранением голографической информации на поверхностном экране, расположенном на горизонте Вселенной [3]. Кроме этого, в работах [4, 5], опирающихся в большой степени на физику черных дыр, была разработана новая концепция эволюции Вселенной — так называемая энтропийная космология. Авторами этой концепции было показано, что центральным понятием, необходимым для возникновения отрицательной гравитации, является рост энтропии на горизонте Вселенной (см., например, [6]). Таким образом, было продемонстрировано, что наряду с традиционным объяснением ускоренного расширения Вселенной, основанном на присутствии некоторой управляющей силы в уравнениях Фридмана-Робертсона-Уокера, обусловленной в конечном счете темной энергией (гипотетической средой с отрицательным давлением), возможна альтернативная интерпретация ее динамической эволюции, связанная с наличием отталкивающей энтропийной силы.

В дальнейшем, в ходе всестороннего исследования космологических последствий данной концепции, в целом ряде работ были изучены различные модифицированные космологические уравнения, моделирующие ускоренное расширение однородной и изотропной Вселенной. В частности, на базе термодинамического подхода Верлинде [5] в работах [7, 8] были окончательно установлены основы энтропийной космологии, допускающие наличие на горизонте Вселенной обычно пренебрегаемых в классической ОТО поверхностных членов, связанных с так называемыми энтропийными силами, которые обеспечивают ее ускоренное расширение. В целом ряде последующих публикаций (см., например, [8–15]), выполненных в рамках энтропийной космологии, рассмотрены разнообразные сценарии ускоренного расширения Вселенной в предположении, что космический горизонт, подобно горизонту событий черной дыры, имеет свою нестационарную температуру и энтропию.

Важно при этом подчеркнуть, что в указанных исследованиях наравне с температурой де Ситтера [16] использовались различные формы энтропийных мер (выбранных *ad hoc*), ассоциированных, по предположению, с областью видимого космологического горизонта. К ним, помимо энтропии Бекенштейна-Хокинга [1], относятся, в частности, энтропия с фрактальной размерностью Барроу [17, 18], неэкстенсивная энтропия Тсаллиса-Кирто [19], модифицированная энтропия Реньи [20], каппа-энтропия Каниадакиса [21, 22], модифицированная энтропия Шарма-Миттала [23, 24] и др.

Исходный выбор указанных неэкстенсивных энтропий определялся тем, что общая энтропия космологической гравитационной системы должна быть связана с ее объемом [19], а не с поверхностью, как это имеет место в случае энтропии Бекенштейна-Хогинга. С помощью полученных методами энтропийной космологии различных обобщенных уравнений Фридмана-Робертсона-Уокера было показано, что основанные на них теоретические модели, описывающие текущую фазу ускоренного расширения Вселенной, хорошо согласуются с данными по сверхновым (см., например, [25]).

Большинство цитируемых выше феноменологических энтропийно-силовых моделей могут быть интерпретированы как частный случай $\Lambda(t)$CDM-моделей (см., например, [11, 26]). Эта интерпретация подразумевает, в частности, что используемая модельная энтропия на горизонте является обменной (обратимой), связанной с «космологией энергетического обмена». Подобный энергетический обмен эквивалентен взаимодействию между темной материей и темной энергией или негравитационному взаимодействию между темной материей и энергией вакуума (см. [27–29]). Сразу отметим, что поскольку в энтропийной космологии темная энергия не рассматривается, то в настоящей работе (выполненной в рамках этой космологии) под взаимодействием будем подразумевать передачу энергии между темной массой Вселенной[1] и ее событийным горизонтом, на котором, по предположению, сосредоточена вся энергия вакуума [30].

Важно подчеркнуть, что существующая на сегодня фаза ускоренного расширения Вселенной, вероятно, была не единственной. Согласно стандартной космологической модели, вскоре после большого взрыва Вселенная должна была пережить очень короткий период ($\sim 10^{-30}$ с) быстрого ускоренного расширения, ответственный за наблюдаемую однородность и изотропию Вселенной на больших масштабах, ее пространственную плоскостность и пространственные флуктуации температуры космического фонового излучения (CMB). В связи с

[1] В общем случае Вселенная считается заполненной материей и темной энергией — идеальными жидкостями с соответствующими давлениями и плотностями энергии. Поскольку гравитационные эффекты темной энергии и темной материи противоположны (т. е. имеет место гравитационное отталкивание против гравитационного притяжения) и поскольку обычная материя сгущается в минимумах гравитационного потенциала (которые связаны со сгущениями темной материи), а темная энергия распределена очень однородно, то можно ожидать, что любое динамическое взаимодействие между этими двумя темными компонентами Вселенной будет крайне слабым или даже пренебрежимо малым. По этой причине в данной работе мы ограничились рассмотрением только однокомпонентной космологической жидкости (связанной с темной материей) при стандартном предположении, означающем, что указанные компоненты не взаимодействуют.

этим возникла необходимость во введении еще одного нового энергетического компонента для описания этого явления.

В литературе описан подобный механизм космологического ускорения, который связан с гравитационным производством холодной космологической материи. Микроскопическое объяснение этого механизма было впервые дано Шредингером [31] и основательно разработано Паркером и другими на основе квантовой теории гравитационного поля в искривленных пространствах [32, 33]. Качественно этот гравитационно-индуцированный механизм квантового создания материи можно объяснить процессом квантования гравитационного поля, эволюционирующего в рамках геометрии Фридмана-Робертсона-Уокера (FRW), что приводит к созданию частиц, причем энергия для этих вновь созданных частиц материи поступает от меняющегося во времени гравитационного поля [34]. Другими словами, изменяющаяся во времени геометрия ведет себя как «насос», превращающий кривизну в частицы.

Наряду с этим в работе Пригожина и др. [35] было предложено феноменологическое описание механизма производства частиц в пространстве-времени под действием гравитационного поля, основанное на использовании неравновесной термодинамики для описания адиабатического создания материи и энтропии в открытой космологической системе. Позже в работе [36] авторы рассмотрели явно ковариантный подход к моделированию процесса создания материи и применили его к космологии. При этом процесс создания частиц описывается членом обратной реакции в уравнениях поля Эйнштейна, отрицательное давление которого обеспечивает самоподдерживающийся механизм космического ускорения. Этот подход в корне меняет обычные адиабатические законы сохранения энергии в классической ОТО, приводя тем самым к процессу необратимого возникновения материи, связанному с передачей энергии от гравитационного поля к созданной материи. В соответствии со вторым законом термодинамики необратимое производство холодной темной материи порождает в свою очередь крупномасштабную космологическую энтропию. В настоящей работе, выполненной в рамках энтропийной космологии, рассматривается феноменологическая этропийно-силовая модель ускоренного расширения однородной, изотропной, пространственно плоской Вселенной с преобладанием космологической темной материи, предполагающая несколько форм энтропии (например, Бекенштейна, Тсаллиса-Кирто и др.) на горизонте Вселенной, когда энтропия ведет себя так, как если бы она была связана с обменом энергии между основной ее массой и горизонтом (при учете необратимой энтропии, обусловленной созданием материи [30, 37]).

2. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ НЕРАЗРЫВНОСТИ ИЗ ПЕРВОГО ЗАКОНА ТЕРМОДИНАМИКИ

2.1. Некоторые элементы энергетически обменной $\Lambda(t)$-космологии

Далее мы ограничимся обсуждением различных модификаций классических уравнений Фридмана-Робертсона-Уокера для пространственно плоской, однородной и изотропной Вселенной, которая моделируется одной идеальной космологической жидкостью (относящейся к темной материи). Из уравнений гравитационного поля общей теории относительности Эйнштейна в метрике Фридмана-Робертсона-Уокера вытекают следующие модифицированные уравнения поля для масштабного фактора $a(t)$:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \equiv H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(t) + \Lambda(t)/3, \tag{1}$$

$$\begin{gathered}\frac{1}{a(t)}\ddot{a} \equiv \left[\frac{dH(t)}{dt} + H(t)^2\right] = \\ = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho(t) + \frac{3p(t)}{c^2}\right) + \Lambda(t)/3,\end{gathered} \tag{2}$$

описывающие эволюцию плоской Вселенной. Здесь t — космологическая временная координата; $a(t)$ — масштабный фактор Робертсона-Уокера (коэффициент расширения Вселенной); G, c, $p(t)$, $\rho(t)$ — соответственно гравитационная постоянная, скорость света, скалярное давление и эффективная плотность космологической жидкости (в основном темной материи — холодного вещества с крайне малым давлением за пределами светящейся материи [38]); $H(t) = \dot{a}/a$ — хаббловская скорость расширения Вселенной или так называемый параметр Хаббла (который в современный период равен $H_0 = 2.2 \times 10^{-18} \text{с}^{-1}$). Уравнения (1) и (2) включают изменяющийся во времени дополнительный управляющий параметр $\Lambda(t)/3$. В эйнштейновской ОТО это так называемый космологический член, который эквивалентен ковариантно сохраняющейся плотности энергии вакуума [39]; при надлежащем определении параметра $\Lambda(t)$ может объяснить ускоренное расширение Вселенной [40]. В энергетически обменной космологии, которая обсуждается в данной работе, параметр $\Lambda(t)$ описывает передачу энергии между темной материей и энергией вакуума на границе (на видимом горизонте Вселенной).

Из уравнений (1) и (2) вытекает следующий закон сохранения энергии (или уравнение неразрывности):

$$\dot{\rho}(t) + 3H(t)[1 + w]\rho(t) = -\Lambda(t) / 8\pi G. \quad (3)$$

Для его получения нужно продифференцировать фундаментальное уравнение Фридмана (1), связанное с расширением Вселенной, и результат скомбинировать с уравнением ускорения (2), которому удовлетворяет скалярное давление космологической жидкости. При написании (3) использован параметр w уравнения состояния для эффективной плотности энергии, который задается соотношением $w(t) = p(t) / \rho(t)c^2$.

Правая часть уравнения неразрывности (3) обычно ненулевая, за исключением простого случая $\Lambda(t) = \Lambda$, т. е., когда уравнения ускорения (2) и неразрывности идентичны уравнениям стандартной Λ CDM-модели, используемой для описания эволюции поздней Вселенной. Подобная модель содержит дополнительный энергетический компонент, плотность которого в настоящее время связывают с космологической постоянной Λ[2]. Заметим, что измеренная величина параметра Λ более чем на два порядка меньше ее теоретического значения, оцененного квантовой теорией поля. Для решения указанной несогласованности в космологической литературе были предложены многочисленные модели $\Lambda(t)$ CDM, допускающие зависящий от времени космологический член. В частности, совокупность моделей $\Lambda(t)$ CDM, интерпретируемая как своего рода *энергетическая обменная космология*, предполагает передачу энергии между двумя жидкостями — темной материей и темной энергией [28, 29], либо между темной материей и энергией вакуума на границе (на видимом горизонте Вселенной) [7, 27, 29]. В данной работе обсуждается второй обменный вариант, когда $\Lambda(t) \equiv f_\Lambda(t)$ (см. ниже).

Уравнение (3) для стандартной Λ CDM-модели принимает вид:

$$\dot{\rho}(t) + 3\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\left[\rho(t) + \frac{p(t)}{c^2}\right] = 0. \quad (4)$$

[2] Космологическая постоянная обычно ассоциируется с плотностью энергии вакуума $\rho_\Lambda = \Lambda/8\pi G$, хотя ее измеренное значение $\rho_\Lambda \sim 10^{-47}\mathrm{GeV}^{-4}$ трудно согласовать со значениями, полученными в квантовой теории поля и в теории струн, которые на много порядков больше.

Если зависимость давления $p(t)$ от плотности $\rho(t)$ известна, то, решив уравнения (1) и (4), можно определить масштабный фактор $a(t)$ для всех моментов времени. Таким образом, можно считать, что фундаментальными уравнениями динамической космологии являются фундаментальное уравнение Фридмана (1), уравнение сохранения энергии (3) и уравнение состояния. Заметим, что найденное при этом решение $a = a(t)$ автоматически удовлетворяет уравнению ускорения (2), поскольку, дифференцируя (1) по времени и используя (4), получаем

$$2\dot{a}\ddot{a} = \frac{8\pi G}{3a}\dot{a}\left[-\rho a^2 + \frac{\partial}{\partial a}\left(\rho a^3\right)\right] =$$
$$= -\frac{8\pi G}{3a}\dot{a}\left(\rho a^2 + 3\frac{p}{c^2}a^2\right),$$

что эквивалентно уравнению (2).

Следует отметить, что в качестве альтернативы уравнение неразрывности (3) может быть выведено непосредственно из первого закона термодинамики, если рассматривать Вселенную как термодинамическую систему, ограниченную видимым горизонтом.

2.2. Термодинамический вывод уравнения неразрывности

Учитывая тепловые свойства ускоряющейся Вселенной, приведем сначала термодинамический вывод обобщенного уравнения неразрывности (3), модифицируя подход, развитый в монографии [41]. Рассмотрим некий локальный жидкий элемент космологической системы (например шар малого радиуса $\hat{r}_s$), обменивающейся энергией с окружающей средой в форме тепла и механической работы. Тогда из первого начала термодинамики следует, что количество энергии (тепловой поток) dQ_e, которым этот элемент обменивается с внешним окружением за время от t до $t + dt$, т. е. проходит через его поверхность, определяется следующим соотношением

$$dQ_e(t) = dE(t) + pdV(t). \quad (5)$$

Здесь dE и dV — изменения внутренней энергии и объема рассматриваемой сферы, занимаемой веществом, соответственно. Соотношение (5) может быть переписано в виде

$$dQ_e(t) = \left(\frac{\partial E(t)}{\partial t} + p\frac{\partial V(t)}{\partial t}\right)dt = \left(\dot{E} + p\dot{V}\right)dt. \quad (6)$$

Пусть теперь элементарная сфера произвольного начального радиуса $\hat{r}_s$ расширяется вместе с универсальным расширением Вселенной, так что ее радиус $r(t)$ в момент времени t определяется выражением $r(t) = a(t)\hat{r}_s$. Тогда

$$V(t) = (4\pi/3)\hat{r}_s^3 a(t)^3. \quad (7)$$

Используя выражение (7), скорость изменения объема сферы можно записать как

$$\dot{V} = \frac{4\pi}{3}\hat{r}_s^3\left(3a^2\dot{a}\right) = V\left(3\frac{\dot{a}}{a}\right) = 3V(t)H(t). \quad (8)$$

Полная внутренняя энергия сферы определяется соотношением $E(t) = \varepsilon(t)V(t)$, где $\varepsilon(t) = \rho(t)c^2$ — плотность внутренней энергии. Отсюда для скорости изменения величины $E(t)$ имеем

$$\dot{E} = \dot{\varepsilon}V + \varepsilon\dot{V} = (\dot{\varepsilon} + 3H\varepsilon)V. \quad (9)$$

Подставляя выражения (8) и (9) в $\dot{E} + p\dot{V}$, получим

$$\begin{aligned}\dot{E} + p\dot{V} &= (\dot{\varepsilon} + 3H\varepsilon)V + 3pVH = \\ &= \left[\dot{\varepsilon} + 3H(\varepsilon + p)\right]V = \\ &= \left[\dot{\rho} + 3H\left(\rho + p/c^2\right)\right]c^2 V.\end{aligned} \quad (10)$$

Классическая формулировка второго закона термодинамики состоит в том, что для всех обратимых изменений в закрытой системе с однородной температурой T энтропия системы S определяется соотношением $d_eS = dQ_e / T$. Подставляя теперь соотношения (8) и (10) в уравнение (6), получим второй закон термодинамики для расширяющегося (или сжимающегося) элементарного объема V в бездиссипативной космологической жидкости, записанный в виде:

$$\begin{aligned}\frac{dQ_e}{dt} &= T\frac{d_eS}{dt} = \left(\dot{E} + p\dot{V}\right) = \\ &= \left[\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)\right]c^2 V = \\ &= \left[\dot{\varepsilon} + 3H(\varepsilon + p)\right]\left(\frac{4\pi}{3}r^3\right).\end{aligned} \quad (11)$$

Если тепловой поток dQ_e через границу элементарного объема космологической жидкости остается постоянным на протяжении всего пути его движения, то $d_eS = 0$. Подобные обратимые и адиабатические процессы являются изэнтропическими. Для них уравнение (11) сводится к классическому уравнению неразрывности (3) в ОТО для адиабатического расширения плоской Вселенной. Таким образом, классические уравнений гравитационного поля общей теории относительности являются чисто адиабатическими и обратимыми и, следовательно, «неспособны обеспечить энтропийный всплеск, сопровождающий производство материи во Вселенной» [35].

2.3. Неадиабатические процессы в космологической жидкости

В общем случае необратимых изменений в закрытой системе ее энтропия удовлетворяет неравенству $dS > dQ_e / T$. Следуя Клаузиусу, обычно вводят новую всегда положительную величину $dQ_i = TdS - dQ_e$ (так называемую некомпенсированную теплоту), которая возникает вследствие протекания необратимых процессов внутри самой системы. Таким образом, энтропия системы может изменяться вследствие двух и только двух причин: либо в результате возникновения энтропии в самой системе, либо в результате переноса энтропии из внешней среды (или во внешнюю среду) через границу системы. Обозначая эти составляющие измененной энтропии через $d_eS := dQ_e / T$ и $d_iS := dQ_i / T$, получим следующее выражение для полного изменения энтропии системы $dS = d_eS + d_iS$.

Процитируем теперь И. Пригожина [35]: «Очень немногие физические теории находятся в такой парадоксальной ситуации, как космология сегодня. С одной стороны, наша Вселенная характеризуется значительным содержанием энтропии, в основном в форме излучения черных тел. С другой стороны, уравнения ОТО Эйнштейна являются чисто адиабатическими и обратимыми, и, следовательно, сами по себе вряд ли могут дать объяснение происхождения космологической энтропии».

С целью преодоления этой проблемы авторами работы [35] была предложена новая интерпретация тензора энергии-импульса в уравнениях ОТО Эйнштейна, позволяющая учесть как материю, так и создание энтропии на макроскопическом уровне. В этом исследовании обсуждается непрерывный процесс генерации частиц (и, следовательно, энтропии) в «адиабатическом пределе», когда градиенты всех структурных параметров космологической жидкости пренебрежимо малы и можно пренебречь возможными диссипативными явлениями, но при этом удельная энтропия на частицу остается постоянной в течение всего процесса [36, 42]. Подобное рассмотрение существенно изменяет классический адиабатический закон сохранения энергии (3), приводя к появлению в нем дополнительного члена, связанного с передачей энергии от гравитационного поля к созданной материи[3]. Процесс производства материи порождает крупномасштабную космологическую энтропию в полном соответствии со вторым началом термодинамики и поэтому является термодинамически возможным. Таким образом, модифицированная теория гравитации Пригожина со связью «геометрия-материя» может рассматриваться как обеспечивающая производство частиц в космологической жидкости, заполняющей Вселенную.

3. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ОБОБЩЕННЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ СО СВЯЗЬЮ ГЕОМЕТРИЯ-МАТЕРИЯ

Далее мы будем следовать обобщенному подходу Пригожина при рассмотрении термодинамики закрытых систем[4] в контексте космологии, который включает в себя разработку феноменологической модели адиабатического производства материи и обеспечивает более расширенное понимание энтропийной космологии [43–45]. В отличие от традиционного описания космологической жидкости с помощью двух переменных — плотности энергии $\rho(t)$ и скалярного давления $p(t)$, в этом подходе модель дополняется новой переменной — плотностью $n(t)$ числа материальных частиц (строго говоря барионов), движущихся вместе с жидкостью.

3.1. Термодинамическая модель гравитационного создания материи

Для того чтобы сделать последующее изложение более понятным, мы приведем здесь феноменологический вывод модифицированного (обусловленного адиабатическим созданием материи) уравнения неразрывности, соответствующего оригинальной работе [35]. В адиабатическом пределе, когда все диссипативные процессы отсутствуют[5], для локального объема V идеальной однородной космологической жидкости, содержащего N частиц, второй закон термодинамики утверждает, что давление p, плотность энергии ε и объем, приходящийся на одну частицу, $1/n = V/N$, можно выразить как функцию температуры T и энтропии $\sigma = S/N$, приходящейся на одну частицу, так что имеет место следующее соотношение Гиббса [1, 46, 47]:

$$T\frac{d\sigma}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\varepsilon}{n}\right) + p\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\left[\frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{\varepsilon + p}{n}\frac{dn}{dt}\right],$$

или

$$T\frac{dS}{dt} = V\frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{\varepsilon + p}{n}V\frac{dn}{dt} = \\ = \frac{d(\varepsilon V)}{dt} + p\frac{dV}{dt} - \frac{\varepsilon + p}{n}\frac{d(nV)}{dt}.$$

Это выражение можно также записать в классической форме соотношения Гиббса

$$T\frac{d_eS}{dt} + \frac{h}{n}\frac{d(nV)}{dt} \equiv \frac{d_eQ}{dt} + \frac{d_iQ}{dt} = \frac{dE}{dt} + p\frac{dV}{dt}, \qquad (12)$$

где d_eQ — тепло, полученное этой системой из окружения за время dt; $h = \varepsilon + p$ — энтальпия на единицу объема. Второй член $\left[hn^{-1}d(nV)\right]$ в левой части уравнения (12) связан с некомпенсированной теплотой d_iQ, обусловленной созданием материи. Таким образом, некомпенсированная теплота, вырабатываемая самой космологической системой, полностью обусловлена ростом числа частиц. С космологической точки зрения, это изменение связано с передачей энергии от гравитации к материи, причем гравитационно-индуцированное создании частиц выступает в качестве источника космологической энтропии [35].

В случае отсутствия обменных энергетических процессов на границе шаровой области, определяемых условием $\dot{Q}_e = T\dot{S}_e = 0$ (здесь S_e — обменная энтропия на границе области), дифференциальное уравнение (12) с учетом формулы (8) может быть записано в виде[6]

$$\dot{\varepsilon} + 3H(\varepsilon + p) - (\varepsilon + p)\frac{\dot{n} + 3Hn}{n} = \frac{1}{V}\dot{Q}_e \simeq 0. \qquad (13)$$

[3] Важно отметить, что оригинальная теория гравитации Пригожина [35] развита на основе ОТО в рамках ковариантной формулировки обобщенных уравнений гравитационного поля, включающей величину производства материи в тензор энергии-импульса.

[4] Напомним, что закрытыми системами в классической термодинамике называются системы, которые могут обмениваться с окружающей средой энергией, но не веществом [48].

[5] Общий случай диссипативной (теплопроводной, вязкой, создающей частицы) космологической жидкости рассмотрен с единой ковариантной точки зрения в работах [46, 49].

[6] Как правило, тепловой поток на границе Вселенной $dQ_h = TdS_h$ пренебрежимо мал при рассмотрении адиабатического создания материи [35, 42, 43]. Подобное пренебрежение может быть связано, в частности, с малым свободным параметром γ, фигурирующим в формуле (см. (33)) для температуры [50]. Однако в данном подразделе мы для общности рассмотрения оставляем величину $\dot{Q}_e$ в уравнении (13).

С термодинамической точки зрения это уравнение, являющееся обобщенным уравнением сохранения энергии в теории гравитации Пригожина (ср. с (4) или с (11)), может быть интерпретировано как уравнение, описывающее адиабатическое образование материи в изотропной и гетерогенной космологической жидкости с изменяющейся во времени плотностью пылевых частиц, скорость $\Gamma(t)$ создания которых определяется соотношением

$$\Gamma(t) := \frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = \frac{\dot{n} + 3Hn}{n}.$$

Отсюда уравнение эволюции для числовой плотности частиц n имеет следующий вид:

$$\dot{n} = -3\frac{\dot{a}}{a}n + n\Gamma(t). \tag{14}$$

Уравнение сохранения энергии (13) в термодинамической теории гравитации Пригожина может быть записано теперь следующим образом:

$$\dot{\varepsilon} + 3H(\varepsilon + p) - (\varepsilon + p)\Gamma = \frac{3}{4\pi r^3}\dot{Q}_{\text{e}} \simeq 0. \tag{15}$$

Следовательно, уравнение (13), описывающее адиабатический процесс гравитационного создания частиц в космологической системе, может быть записано как эффективное уравнение сохранения энергии (уравнение неразрывности)

$$\dot{\varepsilon} + 3H(\varepsilon + p + p_{\text{c}}) = \frac{3}{4\pi r^3}\dot{Q}_{\text{e}} \simeq 0, \tag{16}$$

в котором величина p_{c}, называемая давлением при адиабатическом создании материи, определяется выражением

$$\begin{aligned} p_{\text{c}}(t) &= -\frac{\varepsilon + p}{n}\frac{d(nV)}{dV} = \\ &= -(\varepsilon + p)\frac{\dot{n} + 3nH}{3nH} = -\frac{(\rho c^2 + p)\Gamma}{3H}. \end{aligned} \tag{17}$$

По аналогии с классическим уравнением неразрывности (3) уравнение (16) может быть записано так же, как

$$\begin{gathered} \dot{\rho} + 3H\left(\rho + \frac{p + p_{\text{c}}}{c^2}\right) = -\frac{1}{8\pi G}\dot{f}_{\Lambda}(t) \simeq 0, \\ \left(\text{где} \quad \dot{f}_{\Lambda}(t) \equiv -6\frac{G}{c^2 r_{\text{hor}}^3}T\dot{S}_{\text{hor}}\right). \end{gathered} \tag{18}$$

Здесь величину $\left[-\dot{f}_{\Lambda}(t)\right]$ на горизонте (hor) Вселенной можно интерпретировать как некое подобие временной производной $\dot{\Lambda}(t)$ космологического члена, связанного с обменной энтропией S_{hor} на границе [28].

Если $\Gamma = 0$, то уравнение (16) сводится к уравнению неразрывности (3) в ОТО для адиабатического расширения Вселенной. В случае, когда $\Gamma \neq 0$, уравнение (16) определяет, как скорость создания материи Γ изменяет эволюцию масштабного фактора и плотность энергии материи в сравнении с классическим случаем (не учитывающим гравитационно-индуцированное создание материи).

Из определения (17) следует, что давление p_{c} отрицательно или равно нулю в зависимости от наличия или отсутствия процесса производства частиц. Очевидно, что когда $\Gamma \geqslant 0$, то справедливо неравенство $p_{\text{c}} \leqslant 0$. Существенное производство частиц — это то явление, которое имеет место в ранней Вселенной. При этом не совсем ясно, действует ли подобный механизм в современную эпоху. Отвечая на этот вопрос, авторы работ [43, 51] показали, что отрицательное давление, сопровождающее гравитационно-индуцированное создание частиц холодной темной материи (CDM), может привести и к нынешней стадии ускоряющейся Вселенной, в которой полностью доминирует CDM, без привлечения концепции темной энергии или космологической постоянной.

3.2. Модифицированные уравнения Фридмана-Робертсона-Уокера

По аналогии с процедурой вывода классических уравнений Фридмана-Робертсона-Уокера из уравнений Фридмана (1) и неразрывности (4), изложенной в разд. 2.1, легко получить, при использовании (1) и (18), обобщенную систему уравнений эволюции плоской Вселенной с адиабатическим производством материи

$$H(t)^2 = \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(t) + \frac{1}{3}f_{\Lambda}(t), \tag{19}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} \equiv \dot{H}(t) + H(t)^2 = \\ &= -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho(t) + 3\frac{p(t) + p_{\text{c}}(t)}{c^2}\right) + \frac{1}{3}f_{\Lambda}(t), \end{aligned} \tag{20}$$

$$\frac{\dot{n}(t)}{n(t)} + 3H(t) = \Gamma(t). \tag{21}$$

Уравнение баланса (21) для плотности числа созданных частиц, дополняющее уравнения (19) и (20) для масштабного фактора $a(t)$, приводит к новой интерпретации уравнений поля Эйнштейна [35, 36, 42].

Далее (до конца этого подраздела) мы ограничим наш анализ адиабатическими преобразованиями, определяемыми условием $\dot{Q}_{\mathrm{e}} = 0$, то есть мы будем игнорировать процессы собственной теплопередачи в космологической системе. Тогда с учетом обычного уравнения состояния $p/c^2 = w\rho$, из (17), (19) и (20) можно получить следующее уравнение ускорения:

$$\ddot{a}a + \left(\frac{1+3w}{2} - \frac{(1+w)\Gamma}{2H}\right)\dot{a}^2 = 0, \qquad (22)$$

которое описывает эволюцию масштабного фактора $a(t)$ в гравитационно-индуцированной космологии с необратимым производством частиц. В случае, когда $\Gamma = 0$, это уравнение сводится к дифференциальному уравнению (2), управляющему ускорением идеальной космологической жидкости.

В данной работе, как было сказано выше, мы рассматриваем Вселенную с преобладанием темной материи ($w \simeq 0$), когда основной вклад в плотность энергии вносит пылеподобное вещество $\left(\rho \simeq \rho_{\mathrm{dm}}\right)$ с пренебрежимо малым давлением $\left(p_{\mathrm{dm}} \simeq 0\right)$; в этом случае уравнение ускорения (22) сводится к виду

$$\ddot{a}a + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\Gamma}{H}\right)\dot{a}^2 \simeq 0, \qquad (23)$$

и, с учетом преобразования $\ddot{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{a} = \left(\dot{\boldsymbol{H}} + \boldsymbol{H}^2\right)\boldsymbol{a}^2$, может быть записано как

$$\dot{H} + (3/2)(1 - \Gamma/3H)H^2 = 0. \qquad (24)$$

С другой стороны, из (21) вытекает уравнение

$$\dot{n}/3Hn + (1 - \Gamma/3H) = 0, \qquad (25)$$

из которого видно, что процесс создания материи эффективно может описываться безразмерным параметром $\Delta(t)$: $= \Gamma/3H$, являющимся общем случае функцией времени. Когда параметр $\Delta \ll 1$, то процесс создания материи пренебрежимо мал. Это приводит к следующему решению уравнений (24) и (25): $H = 2/3t$ и n $\sim a^{-3}$, что соответствует модели Эйнштейна-де Ситтера (космологическая модель плоской Вселенной, состоящая только из материи). Противоположный случай ($\Delta \gg 1$) описывает экстремальную теоретическую ситуацию, при которой адиабатическое создание материи является настолько мощным процессом, что изменение плотности материи вследствие расширения полностью компенсируется ее созданием. Вероятно, такое поведение может иметь место только в очень ранней Вселенной, как это происходит, например, во время повторного нагревания в процессе инфляции (чрезвычайно быстрого экспоненциального расширения). Промежуточной ситуации создания материи соответствует параметр $\Delta \leqslant 1$. В частности, когда $\Gamma = 3H$ то изменение количества материи во времени вследствие расширения Вселенной точно компенсируется ее созданием, т. е. числовая плотность материи остается постоянной.

В серии работ (см. [43, 52, 53] были исследованы некоторые свойства космологических моделей адиабатического создания материи с учетом следующей феноменологической формулы $\Gamma = 3\beta H$, в которой β — постоянный параметр, лежащий в интервале [0, 1] ($\Delta = \beta$). В результате было обнаружено, что для подобных моделей Вселенная всегда ускоряется при $\beta > 1/3$ и замедляется при $\beta < 1/3$; т. е. в этом случае не существует перехода красного смещения от замедляющегося к ускоряющемуся режиму, на что указывают данные по сверхновым SN Ia [54, 55]. Чтобы описать плавный переход от замедляющегося к ускоряющемуся режиму эволюции Вселенной на низких красных смещениях, авторами цитируемых работ была предложена новая эвристическая формула для скорости $\Gamma = 3\beta H + 3\gamma H_0$ (где $0 \leqslant [\gamma, \beta] \leqslant 1$), включающая дополнительный постоянный член порядка параметра Хаббла. С учетом этой формулы было показано, что вместо доминирования вакуума на красных смещениях нынешняя ускоряющаяся стадия эволюции Вселенной в космологии Эйнштейна-де Ситтера CDM является следствием создания гравитационных частиц.

В заключение этого подраздела заметим, что в космологии часто используется в качестве уравнения состояния так называемый «гамма-закон» $p = (\gamma^* - 1)\rho$, где постоянная γ^*, лежащая в интервале [0, 2], определяет, является ли Вселенная вакуумом ($\gamma^* = 0$), холодным нерелятивистским газом ($\gamma^* = 5/3$), горячим релятивистским газом (излучением) ($\gamma^* = 4/3$) или пылью ($\gamma^* = 1$). С учетом этого уравнения состояния, при использовании формул (18)−(21) можно получить уравнение $\gamma^*(\dot{n}/n) = \dot{\rho}/\rho$, решение которого имеет вид:

$$n = n_0\left(\rho/\rho_0\right)^{1/\gamma^*}, \qquad (26)$$

где n_0 и ρ_0 — значения параметров n и ρ в данный момент времени. При этом следует отметить, что важное соотношение (26) имеет место независимо от конкретной формы, принятой для скорости $\Gamma(t)$ создания материи.

3.3. Термодинамическая модель гравитационного создания необратимой энтропии во Вселенной

Для определения вклада в производство космологической энтропии от процесса создания материи используем классическое соотношение Гиббса в неравновесной термодинамике [48]

$$TdS = Td_{\mathrm{e}}S + Td_{\mathrm{i}}S = d(\varepsilon V) + pdV - \mu d\left(nV\right), \tag{27}$$

где μ — химический потенциал, задаваемый формулой $\mu n = h - Ts$; здесь $s = S / V$ — плотность энтропии. Из уравнения (27) и уравнения (12), записанного в виде

$$d\left(\varepsilon V\right) + pdV = Td_{\mathrm{e}}S + \frac{h}{n}d\left(nV\right), \tag{28}$$

следует неравенство для необратимой энтропии, связанной с созданием материи

$$\begin{aligned} 0 \le Td_{\mathrm{i}}S &= \frac{h}{n}d\left(nV\right) - \mu d\left(nV\right) = \\ &= \frac{h}{n}d(nV) - \frac{h - Ts}{n}d(nV) = \\ &= \frac{Ts}{n}d(nV) = \frac{Ts}{n}\Gamma V = T\sigma d(nV), \end{aligned} \tag{29}$$

где $s = \sigma n$; $\sigma = S / N$ — удельная энтальпия (на одну частицу). Таким образом, в соответствии со вторым законом термодинамики, единственными вариациями полного числа частиц N в объеме V допускаются такие изменения, при которых

$$dN = d(nV) \ge 0\cdot \tag{30}$$

Согласно Пригожину, неравенство (30) для нынешних космологических систем подразумевает, что пространство-время может производить материю, в то время как обратный процесс термодинамически запрещен. Другими словами, отношения между пространством-временем и материей перестают быть симметричными, поскольку производство частиц, происходящее за счет гравитационной энергии, оказывается необратимым процессом [35]. Следовательно, по Пригожину, происходит только создание материи, а обратный процесс (разрушение материи) невозможен.

Следует, однако, заметить, что в работе [36] авторы заново проанализировали аспекты процесса создания частиц в рамках явно ковариантной формулировки обобщенных уравнений гравитационного поля и показали, что если удельная энтропия σ в формуле (29) не является постоянной, то утверждение Пригожина теряет свою силу.

4. ОБМЕННАЯ ЭНЕРГИЯ И ЭНТРОПИЙНЫЕ МЕРЫ НА ВИДИМОМ ГОРИЗОНТЕ ВСЕЛЕННОЙ

До сих пор мы пренебрегали обменной (обратимой) энтропией, обусловленной обменом энергией между основной массой (Вселенной) и границей (видимым горизонтом Вселенной), на которой, по предположению, голографически хранится информация основной массы [7]. По принятому в данной работе допущению обменная энтропия на горизонте ведет себя точно так же, как это имеет место в «энергообменной космологии» расширяющейся Вселенной Фридмана, которая описывает взаимодействие между темной материей и динамической энергией вакуума [27, 29] или обмен энергией между двумя космологическими жидкостями, связанными с темной материей и темной энергией [28, 56].

Как было отмечено во Введении в данной работе, мы, оставаясь в рамках энтропийной космологии [7, 8], ограничимся рассмотрением однокомпонентной космологической жидкости, связанной с темной материей, исключая при этом компонент, соответствующий темной энергии. Кроме этого, используем далее несколько форм феноменологических энтропий (выбранных ad hoc), ассоциированных по предположению с областью видимого космологического горизонта. К ним в общем случае могут относиться: энтропия Бекенштейна-Хокинга [1], энтропия с фрактальной размерностью Барроу [17, 18], неэкстенсивная энтропия Тсаллиса-Кирто [19], модифицированная энтропия Реньи [20], каппа энтропия Каниадакиса [57, 58], двухпараметрическая модифицированная энтропия Шарма-Миттала [23, 59, 60] и др.

Важно при этом отметить, что возможность обмена энергией с границей Вселенной до последнего времени не была полностью прояснена в энтропийной космологии. В недавней работе [30] была предпринята попытка исследования последствий подобного обмена в терминах согласованности двух уравнений неразрывности, выведенных двумя различными способами: на основе классических уравнений Фридмана и ускорения, с одной стороны, и исходя из первого закона термодинамики — с другой. В результате было показано, что два уравнения неразрывности согласуются друг с другом (целиком только для энтропии Бекенштейна-Хокинга), что означает, что обмен энергией между основной массой (Вселенной) и границей (горизонтом Вселенной) вполне отвечает голографическому принципу [5, 7, 8].

С учетом этого вывода рассмотрим далее термодинамический подход к моделированию космологических систем с обратимой на горизонте и необратимой в результате создания материи энтропией, который наилучшим образом подходит для моделирования эволюции Вселенной в рамках энтропийной космологии, добавляя при этом ее расширенное истолкование.

4.1. Обобщенный второй закон космологической термодинамики при учете обменной энтропии на событийном горизонте

Если не игнорировать обменные процессы переноса энергии (вакуума) и энтропии через видимую границу Вселенной, то есть считать, что $dQ_e \neq 0$, то первый закон термодинамики (13), записанный с учетом необратимой энтропии, обусловленной созданием материи, и в случае обратимой (обменной энтропии) на космическом горизонте (когда $r = r_H = c/H$), принимает следующий общий вид [10, 51]

$$\dot{\varepsilon} + 3H\left(\varepsilon + p + p_c\right) = \left(\frac{3}{4\pi r^3} T \frac{d_e S}{dt}\right)_{r=r_H}. \tag{31}$$

В данной работе при моделировании расширения Вселенной будем предполагать, что с космическим горизонтом ассоциированы как обменная энтропия $S_h(t)$[7], так и не совсем определенная температура $T_h(t) = \gamma T_{sit}(t)$, которая пропорциональна температуре де Ситтера [16]

$$T_{sit}(t) = \hbar H / 2\pi k. \tag{32}$$

Здесь k и $\hbar = h/2\pi$ — соответственно постоянная Больцмана и приведенная постоянная Дирака; γ — свободный неотрицательный параметр порядка $O(1)$ для температуры голографического экрана [37, 61]. Согласно [8, 12, 13] величина $\gamma \sim 1/2$ или $3/2\pi$, однако в работе [50] было показано, что параметр γ может быть малым ($\gamma \sim 10^{-3}$), поскольку он ведет себя как разновидность коэффициента β-функции в квантовой теории поля. Вместе с тем малость свободного параметра γ все еще не объяснена в контексте голографического подхода.

Температура видимого горизонта Вселенной может быть записана как

$$T_h = \gamma \frac{\hbar H}{2\pi k} = \gamma \frac{c^5}{2G} \frac{H}{K}. \tag{33}$$

Здесь введена широко применяемая в космологии положительная численная константа

$$K = \frac{\pi k_B c^5}{\hbar G} = \frac{\pi k_B c^2}{L_{pl}^2} = \frac{\pi k_B c^2}{A_{pl}} > 0, \tag{34}$$

где $L_{pl} = \sqrt{\hbar G / c^3}$ — длина Планка.

Для радиуса r_H в уравнении (31) будем использовать радиус Хаббла

$$r_H(t) = c / H(t), \tag{35}$$

поскольку видимый горизонт в пространственно плоской Вселенной совпадает с радиусом Хаббла. С учетом формул (33)–(35) перепишем уравнение неразрывности (31) в виде:

$$\dot{\rho} + 3H\left(\rho + \frac{p + p_c}{c^2}\right) = \frac{3H^3}{4\pi c^5} T_h \dot{S}_h = \gamma \frac{3}{8\pi G} \frac{H^4}{K} \dot{S}_h. \tag{36}$$

Конкретизируем теперь это уравнения, для чего рассмотрим несколько модельных энтропий, ассоциированных (по предположению) с космологическим горизонтом Вселенной и традиционно используемых в энтропийной космологии.

4.2. Стандартная обменная энтропия Бекенштейна-Хокинга на событийном горизонте

По аналогии с термодинамическими характеристиками хаббловского горизонта черной дыры, в энтропийной космологии предполагается, что ее горизонт имеет ассоциированную энтропию Бекенштейна-Хокинга (S_{B-H}), которая задается следующим соотношением [1, 7]:

$$S_{B-H} = k\left(\frac{A_H}{A_{Pl}}\right) = k \frac{c^3}{\hbar G} \frac{A_H}{4}, \tag{37}$$

где $A_H = \pi r_H^2 = \pi c^2 H^{-2}$ — величина площади поверхности области хаббловского радиуса r_H; $A_{Pl} = \hbar G / c^3 \approx 2.612 \times 10^{-70}$ м^2 — площадь Планка.

[7] В энтропийной космологии, основанной на голографическом принципе, предполагается несколько форм энтропии на горизонте Вселенной [8, 12, 13, 26].

При подстановке величины $A_{\rm H}$ в соотношение (37) получим

$$S_{\text{B–H}} = k\left(\frac{c^3}{\hbar G}\right)\pi r_{\rm H}^2 = \\ = \left(\frac{k\pi c^5}{\hbar G}\right)\frac{1}{H^2} \equiv \frac{K}{H^2} \sim k\left(2.6 \pm 0.3\right)\times 10^{122}. \tag{38}$$

Производная по времени от энтропии $S_{\text{B–H}}$ определяется формулой

$$\dot{S}_{\text{B–H}} = 2\left(\frac{\pi k c^3}{\hbar G}\right) r_{\rm H}\dot{r}_{\rm H} = 2\left(\frac{K}{c^2}\right) r_{\rm H}\dot{r}_{\rm H} = -\frac{2K}{H^3}\dot{H}. \tag{39}$$

Подставляя в уравнение неразрывности (36) $\dot{S}_{\rm h} = \dot{S}_{\text{B–H}}$, в результате получим

$$\dot{\rho} + 3H\left(\rho + \frac{p + p_{\rm c}}{c^2}\right) = -\gamma\frac{3}{4\pi G}H\dot{H}. \tag{40}$$

Правая часть этого уравнения связана с обменной энергией основной массы Вселенной с ее границей. Если хаббловская скорость расширения Вселенной H постоянна, то уравнение (40) сводится к обобщенному уравнению неразрывности (17), учитывающему только гравитационно-индуцированное создание материи в эволюционирующей Вселенной.

Сравнивая между собой уравнения (18) и (40), найдем

$$\frac{1}{8\pi G}\dot{f}_\Lambda(t) = \gamma\frac{3}{4\pi G}H\dot{H}. \tag{41}$$

Отсюда следует $\left(1/3\right)f_\Lambda\left(t\right) = \gamma H^2$. Подставляя это значение в уравнения (19)–(21), получим следующую систему уравнений:

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \gamma H^2, \tag{42}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + 3\frac{p + p_{\rm c}}{c^2}\right) + \gamma H^2, \tag{43}$$

$$\frac{\dot{n}}{n} + 3\frac{\dot{a}}{a} = \Gamma,\ p_c = -\frac{\left(\rho c^2 + p\right)\Gamma}{3H},\ \Gamma = 3H + \frac{\dot{n}}{n} \simeq 3\beta H,$$

$$p = \left(\gamma^* - 1\right)\rho,\ \frac{n}{n_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{1/\gamma^*}, \tag{44}$$

предназначенную для моделирования эволюции плоской Вселенной с производством материи и обменной энтропией Бекенштейна-Хокинга на границе [36, 42].

4.3. Обменная фрактальная энтропия Барроу на горизонте Вселенной

Недавно в работе [17] была предложена модель квантовой гравитационной пены (пеноподобной структуры, называемой пространственно-временной пеной) для оценки энтропии в области видимого горизонта Вселенной, поверхность которого может иметь сложную фрактальную структуру вплоть до сколь угодно малых масштабов. Другими словами, предлагалось учитывать в определении энтропии то, что квантово-гравитационные флуктуации пространства-времени могут вызвать модификацию топологии пространства-времени в масштабе планковской длины. Согласно Барроу, возможные эффекты квантово-гравитационной пены пространства-времени в области горизонта Вселенной приводят к следующему определению фрактальной (неэкстенсивной) энтропии Барроу, связанной с аддитивной энтропией Бекенштейна-Хокинга

$$S_{\rm Bar}/k := \left(S_{\text{B–H}}/k\right)^{1+\Delta/2}. \tag{45}$$

Таким образом, рассматривая формулировку Барроу, можно измерить ее отклонение от энтропии Бекенштейна-Хокинга через показатель Δ, отвечающий фрактальной размерности поверхности горизонта. Параметр Δ ($0 \leqslant \Delta \leqslant 1$), являясь фрактальной размерностью квантово-гравитационной пены, количественно определяет степень деформацию структуры горизонта Вселенной[8]. Подстановка численных значений энтропии $S_{\text{B–H}}$ и постоянной Больцмана $k_{\rm B}$ в определение (45) приводит к следующей оценке энтропии $S_{\rm Bar} \sim 10^{120\left(1+\Delta/2\right)}$.

Энтропию Барроу $S_{\rm Bar}$ можно записать в следующих формах:

$$S_{\rm Bar} = k\left(\frac{A_{\rm H}}{A_{\rm Pl}}\right)^{1+\Delta/2} = k\left(\frac{\pi r_{\rm H}^2}{A_{\rm Pl}}\right)^{1+\Delta/2} = \\ = K\left(\frac{K}{k_{\rm B}}\right)^{\Delta/2} H^{-(2+\Delta)}. \tag{46}$$

[8] При определении энтропии Барроу сложная фрактальная структура космологического горизонта моделируется аналогом сферической «снежинки Коха», использующим бесконечную убывающую иерархию соприкасающихся сфер вокруг горизонта событий Шварцшильда. Тем не менее эта простая модель возможных проявлений квантово-гравитационной эффектов имеет важные следствия для оценок энтропии Вселенной, которая обычно несколько больше, чем в базовом сценарии, связанном с энтропией Бекенштейна-Хокинга.

Здесь A_{Pl} — площадь Планка; $A_{\mathrm{H}} = \pi r_{\mathrm{H}}^2 = \pi c^2 H^{-2}$ — величина площади поверхности области хаббловского радиуса r_{H}.

Когда параметр деформации $\Delta = 0$, что соответствует простейшей структуре космологического горизонта Вселенной, восстанавливается рассмотренная выше стандартная энтропия Бекенштейна-Хокинга

$$S_{\mathrm{Bar}} \equiv S_{\mathrm{B\text{–}H}}\left(\Delta = 0\right) = k\left(A_{\mathrm{H}}/A_{\mathrm{Pl}}\right) = kH^{-2}.$$

В случае максимальной деформации (это самый запутанный квантовый случай), когда фрактальный параметр $\Delta = 1$, имеет место гладкая пространственно-временная структура горизонта Вселенной, при которой энтропия Барроу совпадает с так называемой равно распределенной по степеням свободы энтропией Тсаллиса-Кирто [14, 19, 62]. В этом случае формула (45) аналогична формуле для неаддитивной энтропии Тсаллиса и Кирто

$$S_{\mathrm{Ts\text{–}C}} := k\left(\frac{A_{\mathrm{H}}}{A_{\mathrm{Pl}}}\right)^{3/2} = K\left(\frac{K}{k}\right)^{1/2}\left(\frac{r_{\mathrm{H}}}{c}\right)^{3} = K\left(\frac{K}{k}\right)^{1/2} H^{-3}, \tag{47}$$

ранее полученной при моделировании эволюции черных дыр на основе совершенно других физических принципов, отличных от фрактальной интерпретации горизонта Вселенной [14, 15, 63–66].

Ясно, что в общем случае фрактальной космологической жидкости с дробной фрактальной размерностью ($0 < \Delta < 1$) соответствующие модифицированные космологические уравнения, основанные на голографической энтропии Барроу, открывают новые возможности для моделирования различных термодинамических сценариев эволюции фрактальной Вселенной. Вместе с тем проведенные в последнее время исследования в области космологической термодинамики показали, что если энтропия Барроу возможна в природе, то ее допустимая область все же ограничена в узкой области значений вблизи стандартной энтропии $S_{\mathrm{B\text{–}H}}$. Как было установлено в работах [25, 67, 68], наиболее предпочтительным является значение $\Delta = 0.094$.

Применяя рассмотренную в предыдущем подразделе процедуру вывода модифицированного уравнения неразрывности, но уже с энтропией Барроу, запишем формулу для ее изменения во времени:

$$\dot{S}_{\mathrm{Bar}} = -\left(2+\Delta\right)K\left(\frac{K}{k}\right)^{\Delta/2} H^{-(3+\Delta)}\dot{H}. \tag{48}$$

С учетом этой формулы уравнение неразрывности (36) принимает вид

$$\dot{\rho} + 3H\left(\rho + \frac{p + p_{\mathrm{c}}}{c^2}\right) = -\gamma\frac{3}{4\pi G}\frac{2+\Delta}{2}\left(\frac{K}{k}\right)^{\Delta/2} H^{(1-\Delta)}\dot{H}. \tag{49}$$

Правая часть уравнения (49) связана с обменом энергией между основной массой расширяющейся Вселенной и энергией динамического космического вакуума [27, 50]. Используя уравнение (49), можно получить модифицированные уравнения неразрывности для случая стандартной энтропии Бекештейна-Хокинга ($\Delta = 0$) и Тсаллиса-Кирто ($\Delta = 1$) на границе Вселенной.

Сопоставим теперь уравнения (18) и (49); в результате получим

$$\frac{1}{3}\dot{f}_{\Lambda}(t) = \gamma(2+\Delta)\left(\frac{K}{k}\right)^{\Delta/2} H^{(1-\Delta)}\frac{dH}{dt} = \gamma\frac{2+\Delta}{2-\Delta}\left(\frac{K}{k}\right)^{\Delta/2}\frac{dH^{2-\Delta}}{dt}. \tag{50}$$

Отсюда следует, что энергия взаимодействующего с темной материей вакуума равна [28]

$$\frac{1}{3}f_{\Lambda}(t) = \gamma\frac{2+\Delta}{2-\Delta}\left(\frac{K}{k}\right)^{\Delta/2} H^{2-\Delta}. \tag{51}$$

Если с учетом этого соотношения применить теперь процедуру «гравитационной термодинамики» к модифицированным уравнениям Фридмана-Робертсона-Уокера (19) и (21) для плоской Вселенной с производством материи и обменной энтропией Барроу на границе, то получим следующую систему уравнений:

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \gamma\frac{2+\Delta}{2-\Delta}\left(\frac{K}{k}\right)^{\Delta/2} H^{2-\Delta}, \tag{52}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + 3\frac{p + p_{\mathrm{c}}}{c^2}\right) + \gamma\frac{2+\Delta}{2-\Delta}\left(\frac{K}{k}\right)^{\Delta/2} H^{2-\Delta}, \tag{53}$$

$$\dot{n}/n + 3H = \Gamma. \tag{54}$$

Эта система обобщенных космологических уравнений, содержащая новые дополнительные члены, позволяет получить ряд новых термодинамических сценариев эволюции Вселенной, связанных как с ростом энтропии, обусловленным необратимым процессом создания материи, так и с переносом энтропии Барроу через ее границу. К таким эволюционным моделям Вселенной относятся, в частности, полученная выше модель Бекенштейна-Хокинга (42)–(44), модифицированная за счет учета образования частиц, а также модель Тсаллиса-Кирто (при $\Delta = 1$)

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + 3\gamma\left(\frac{K}{k}\right)^{1/2} H, \tag{55}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + 3\frac{p + p_c}{c^2}\right) + 3\gamma\left(\frac{K}{k}\right)^{1/2} H, \tag{56}$$

$$\dot{n}/n + 3H = \Gamma, \tag{57}$$

связанная с гладкой пространственно-временной структурой космологического горизонта Вселенной. Заметим, что модель, основанная на энтропии $S_{\text{B-H}}$, предсказывает равномерное ускорение Вселенной, тогда как модель, основанная на энтропии $S_{\text{Ts-C}}$, описывает как замедление, так и ускоренное расширение Вселенной [69].

В заключение этого раздела отметим, что, как было показано в ряде публикаций [18, 25, 68], модифицированная космология с помощью процедуры «гравитационной термодинамики», использующей энтропию Барроу в качестве обменной энтропии на горизонте, является эффективной для количественного моделирования эволюции Вселенной в согласии с наблюдениями. Вместе с тем все еще остается необходимым полный сравнительный анализ численного значения энтропийного индекса деформации Δ с использованием наблюдательных данных о сверхновых типа Ia (SNIa) [54] о параметрах сдвига космического микроволнового фона, о барионных акустических колебаниях, а также данных о хаббловской скорости расширения Вселенной.

5. К ВОПРОСУ О МОДЕЛИРОВАНИИ ЭВОЛЮЦИИ ПЛОСКОЙ ВСЕЛЕННОЙ С МОДИФИЦИРОВАННОЙ ЭНТРОПИЕЙ КАНИАДАКИСА НА ГОРИЗОНТЕ

Как уже отмечалось во Введении, в последнее время в энтропийной космологии стали все чаще привлекаться к изучению термодинамических аспектов эволюции космологических систем с сильным гравитационным дальнодействием различные негауссовы энтропийные меры [45, 69–72]. К ним, в частности, относятся оригинальные неэкстенсивные энтропии Реньи (S_{R}) и Тсаллиса (S_{Tc}), связанные, согласно развиваемой концепции, с видимым горизонтом Вселенной (см., например, [14, 15, 64, 73, 74]. Помимо этих энтропий широко используется для исследования термодинамических аспектов эволюции пространства-времени так называемая двойная энтропия Реньи $\hat{S}_{\text{Ren}}$ [20]. Ее вывод связан с заменой энтропии Тсаллиса S_{Tc}, фигурирующей в логарифмической формуле оригинальной энтропии Реньи S_{Ren}, на энтропию Бекенштейна-Хокинга. Полученная в результате такой процедуры модифицированная энтропия Реньи $\hat{S}_{\text{R}}$ отвечает голографическому закону эквипартиции (равнораспределению энергии по степеням свободы [4, 62, 75]. Кроме энтропии $\hat{S}_{\text{Ren}}$ используются и другие модифицированные аналогичным способом энтропии, например, энтропии Каниадакиса и Шарма-Миттала [24, 72, 73]. Важно также подчеркнуть, что в целом ряде энтропийно-силовых моделей, подобных моделям вязкой космологической жидкости [77–81] или моделям создания холодной темной материи [35, 42, 43], обсуждаются и другие энтропии, связанные с диссипативными процессами.

Выбор этих энтропий часто объясняется тем, что суммарная энтропия (внутренней части Вселенной и горизонта) связана с объемом космологической жидкости, а не с ее поверхностью, как это имеет место в случае классической энтропии Бекенштейна-Хогинга. Тем не менее можно показать, что в термодинамическом подходе к моделированию эволюции Вселенной при наличии обменных энергетических процессов на ее границе, использование части подобных энтропий не физично.

Покажем это со всеми подробностями на примере двойной каппа-энтропии Каниадакиса, оригинальная версия которой определяется соотношением [21, 82, 83]

$$\begin{aligned} S_{\text{Kan}}(p) &= -\frac{k}{2\kappa}\sum_{i=1}^{W}\left(p_i^{\kappa+1} - p_i^{\kappa-1}\right) = \\ &= -k\sum_{i=1}^{W} p_i \ln_\kappa p_i. \end{aligned} \tag{59}$$

Здесь $p = \{p_i\}_{i=1,2,\ldots,W}$ — дискретная функция распределения вероятности того, что система находится в определенном микросостоянии, а W — общее число конфигураций. Энтропийный индекс деформации κ (определяющий степень отклонения от стандартной статистической механики, которая восстанавливается в пределе $\kappa \to 0$) в определении (59) представляет собой вещественное число, принадлежащее области $-1 < \kappa < 1$.

При написании формулы (59) использован так называемый «деформированный логарифм», $\ln_{\{\kappa\}}(x) \equiv \left(x^{\kappa} - x^{-\kappa}\right) / 2\kappa$, который при $\kappa \to 0$ переходит в обычный логарифм [58, 84]. Такая деформация логарифмической функции в выражении для энтропии (ср. с энтропией Больцмана-Гиббса $S_{\mathrm{B-G}}\left(p\right) = -k\sum_{i=1}^{W} p_i \ln p_i$) позволяет учитывать важную особенность поведения космологических систем с дальнодействующими гравитационными взаимодействиями, когда вероятность реализации p_i малых значений параметров состояния убывает (при $p_i \to 0^+$) не экспоненциально быстро, а степенным образом (закон Парето). Благодаря этому статистика Каниадакиса описывает события, практически недостижимые в простых системах, характеризуемых классической статистикой Больцмана-Гиббса.

Тем не менее основанная на деформированной энтропии S_{Kan} неэкстенсивная статистика сохраняет математическую и гносеологическую структуру статистики Больцмана-Гиббса и пригодна для описания очень большого класса экспериментально наблюдаемых аномальных (неаддитивных) явлений в естественных науках. В качестве примера можно упомянуть работы, связанные с космическими лучами [21], с космологическими эффектами [85] и с гравитационными системами [76].

5.1. Обобщенные уравнения неразрывности при использовании модифицированной энтропии Каниадакиса на горизонте

При использовании принципа равнораспределения по степеням свободы Падманабхана [75], когда все состояния имеют одинаковую вероятность $p_i = 1 / W$, энтропия Каниадакиса (59) сводится к виду

$$S_{\mathrm{Kan}} = -k \ln_{\kappa} \frac{1}{W} = k \ln_{\kappa} W; \tag{60}$$

при этом в пределе $\kappa \to 0$ из формулы (60) получается обычное представление энтропии Больцмана-Гиббса, $S_{\mathrm{B-G}} = k \ln W$. Авторы работы [86] предложили новый тип каппа-энтропии на видимом горизонте Вселенной. Для ее конструирования они допустили, что энтропия Каниадакиса в форме (59) описывает энтропию Бекенштейна-Хокинга, т. е. что справедлива формула

$$S_{\mathrm{B-H}} = k \ln_{\kappa} W. \tag{61}$$

При использовании свойства $\exp_{\{\kappa\}}\left(\ln_{\{\kappa\}} x\right) = x$ экспоненты Каниадакиса

$$\exp_{\{\kappa\}}(x) \equiv \left(\sqrt{1 + (\kappa x)^2} + \kappa x\right)^{1/\kappa} \tag{62}$$

из определения (61) можно получить выражение $\exp_{\kappa}\left(k^{-1} S_{\mathrm{B-H}}\right) = \exp_{\kappa} \ln_{\kappa} W = W$, или

$$W = \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\kappa}{k} S_{\mathrm{B-H}}\right)^2} + \frac{\kappa}{k} S_{\mathrm{B-H}}\right)^{1/\kappa}. \tag{63}$$

Если теперь, используя логарифмическую формулу классической энтропии Больцмана-Гиббса $S_{\mathrm{B-G}}$, взять логарифм от (63), то в результате получим так называемую двойную энтропию Каниадакиса

$$\hat{S}_{\mathrm{Kan}} = k \ln W = \frac{k}{\kappa} \ln\left(\sqrt{1 + \kappa^2 \left(\frac{S_{\mathrm{B-H}}}{k}\right)^2} + \kappa \frac{S_{\mathrm{B-H}}}{k}\right). \tag{64}$$

В случае, когда в определении (64) $\kappa \to 0$, $\hat{S}_{\mathrm{Kan}} \to S_{\mathrm{B-H}}$. Таким образом, можно считать, что подобное конструирование в статистике Каниадакиса новой неэкстенсивной энтропии $\hat{S}_{\mathrm{Kan}}$ является аналогичной версией построения двойной энтропии Реньи $\hat{S}_{\mathrm{Ren}}$ в статистике Тсаллиса [20, 73], при получении которой энтропия Тсаллиса S_{Ts}, фигурирующая в логарифмической формуле оригинальной энтропии Реньи S_{Ren}, заменяется на энтропию Бекенштейна-Хокинга.

5.2. Модифицированное уравнение неразрывности с обменной двойной энтропией Каниадакиса на горизонте

Используя формулы (38) и (39) для классической энтропии Бекенштейна-Хокинга $S_{\mathrm{B-H}}$ и ее производной по времени

$$S_{\mathrm{B-H}} = \frac{K}{H^2}, \quad \dot{S}_{\mathrm{B-H}} = -\frac{2K}{H^3} \dot{H}, \tag{65}$$

найдем производную по времени для модифицированной энтропии Каниадакиса $\hat{S}_{\mathrm{Kan}}$

$$\frac{d}{dt}\hat{S}_{\mathrm{Kan}} = \left(1 + \kappa^2 \frac{S_{\mathrm{B-H}}^2}{k^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \dot{S}_{\mathrm{B-H}} = -2K\left(1 + \kappa^2 \left(\frac{K}{k}\right)^2 H^{-4}\right)^{-\frac{1}{2}} H^{-3} \dot{H}. \tag{66}$$

При получении этого выражения было использовано правило дифференцирования экспоненты Каниадакиса: $d\exp_{\{\kappa\}}(x) = \left(1+\kappa^2 x^2\right)^{-1/2}\exp_{\{\kappa\}}(x)\,dx$ (см., например, [58]).

Если подставить теперь (66) в (36), то получим уравнение неразрывности для Вселенной, создающей материю и имеющей обменную модифицированную энтропию Каниадакиса $\hat{S}_{\mathrm{Kan}}$ на горизонте

$$\begin{gathered}\dot{\rho} + 3H\left(1+w_{\mathrm{c}}\right)\rho = \\ = -\gamma\frac{3}{4\pi G}\left(1+\kappa^2\left(\frac{K}{k}\right)^2 H^{-4}\right)^{-1/2} H\dot{H}.\end{gathered} \tag{67}$$

Сопоставим теперь уравнения (18) и (67); в результате получим

$$\frac{1}{3}\dot{\Lambda}(t) = 2\gamma\frac{1}{\sqrt{1+\left(\kappa K/k\right)^2 H^{-4}}}H\dot{H}. \tag{68}$$

Отсюда следует

$$\begin{gathered}\frac{1}{3}\Lambda(t) = 2\gamma\int_0^H \frac{HdH}{\sqrt{1+(\kappa K/k)^2 H^{-4}}} = \\ = -\frac{1}{2}\gamma\int_0^{H^{-4}}\frac{z^{-3/2}dz}{\sqrt{1+\omega z}},\end{gathered} \tag{69}$$

где введены обозначения $z = H^{-4}$, $\omega = (\kappa K/k)^2$.

Для интеграла в правой части выражения (69) справедливо следующее представление [87]:

$$\begin{gathered}\int_0^u \frac{z^{\mu-1}dz}{(1+\omega z)^{\nu}} = \frac{u^{\mu}}{\mu}\,{}_2F_1\left(\nu,\mu;\mu+1;-\omega u\right), \\ \text{где}\quad \mathrm{Re}\,\mu > 0,\end{gathered} \tag{70}$$

через гипергеометрическую функцию Гаусса ${}_2F_1\left(a,b;c;z\right)$. Однако, к сожалению, мы не можем воспользоваться формулой (70), поскольку в нашем случае $\mu = -1/2 < 0$. Таким образом, использование модифицированной энтропии Каниадакиса на горизонте в свете рассматриваемого здесь термодинамического подхода к моделированию эволюции Вселенной не применимо. Можно убедиться в том, что аналогичное положение имеет место и для неэкстенсивных расширенных энтропий Реньи и Шармы-Миттала.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Современные космологические данные свидетельствуют о том, что Вселенная расширяется с ускорением. К сожалению, простая модифицированная ОТО, включающая ключевой параметр, характеризующий расширение — космологическую постоянную Λ, не может достаточно точно описать этот феномен. Поэтому возникает необходимость в поиске новых подходов, с помощью которых можно описать ускоренное расширение Вселенной [88].

Одним из механизмов, используемых для объяснения ускорения Вселенной, является добавление нового энергетического поля, часто называемого «квинтэссенцией». Новым направлением на этом пути является построение модифицированной теории гравитации, согласно которой в основе ускоренного расширения Вселенной лежит так называемая энтропийная сила, позволяющая объяснить ускоренное расширение Вселенной в терминах энтропии, без привлечения концепции темной энергии.

В настоящей работе в рамках гравитационной теории Пригожина о связи геометрии и материи, обеспечивающей гравитационно-индуцированное производство частиц в космологической жидкости, термодинамически сконструирована в предположении наличия обменных энергетических процессов на видимом горизонте новая ускоряющая плоская модель однородной и изотропной Вселенной без темной энергии, в которой полностью доминирует холодная темная материя (CDM).

Для их получения было выведено из первого закона термодинамики обобщенное уравнение сохранения энергии с учетом гравитационно-индуцированного создания материи. При этом было использовано несколько форм феноменологических энтропий (выбранных *ad hoc*), ассоциированных, по предположению, с областью видимого космологического горизонта. К ним, в частности, относятся энтропия Бекенштейна- Хокинга, энтропия с фрактальной размерностью Барроу, неэкстенсивная энтропия Тсаллиса-Кирто.

С учетом уравнения сохранения и фундаментального уравнения Фридмана, описывающего расширение Вселенной, сконструированы в контексте энтропийного формализма модифицированные уравнения Фридмана-Робертсона-Уокера, предназначенные для моделирования различных сценариев эволюции плоской Вселенной с производством материи. В результате в работе получен целый набор новых обобщенных уравнений Фридмана-Робертсона-Уокера, в которых вместо космологической постоянной фигурируют управляющие силы, наличие которых приводит к различным сценариям эволюции Вселенной в зависимости от конкретной формы энтропии, изначально выбранной для описания горизонта событий. Другими словами, развитый формализм, альтернативный концепции темной энергии, может служить новой теоретической основой для моделирования динамической эволюции Вселенной, порождая ее модифицированные формы.

К сказанному можно добавить, что по современным представлениям космологическая история Вселенной развивается через инфляционную фазу от начальной флуктуации вакуума (громадная энергия которого сосредоточена на бесконечном квантовом поле Вселенной) к пространству де Ситтера и происходит создание частиц. Фаза де Ситтера существует в течение времени распада составляющих ее частиц (вторая стадия) и заканчивается после фазового перехода в обычную Вселенную Фридмана-Робертсона-Уокера, которая существует до настоящего времени. Примерами распада или образования частиц могут служить такие явления, как образование релятивистских частиц во время повторного нагрева в инфляционных периодах, аннигиляция электронов и позитронов с образованием нейтрино, распад тяжелых бозонов на кварки и лептоны или образование частиц в сильном гравитационном поле. Пригожин обобщил эти явления на базе термодинамической теории с использованием уравнения баланса для числа образовавшихся частиц на единицу объема, которое он рассмотрел в совокупности с уравнениями Эйнштейна для поля. Важно при этом подчеркнуть, что, согласно оригинальной пригожинской модели, энтропия возникает только во время двух первых космологических стадий, в то время как Вселенная развивается адиабатически на космологических масштабах.

Результаты моделирования динамической эволюции Вселенной, выполненного на основе приведенных в статье космологических уравнений, предполагается рассмотреть в других публикациях авторов. На будущее оставлена также работа, связанная с проведением сравнительного анализа результатов моделирования (на основе полученных эволюционных уравнений) при использовании данных о сверхновых типа Ia (SNIa).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *J. D. Bekenstein,* Phys. Rev. D 7, 2333 (1975).
2. *S. W. Hawking,* Commun. Math. Phys. 43, 199 (1975).
3. *R. Bousso,* Reviews of modern physic 74, 825 (2002).
4. *T. Padmanabhan,* Phys. Rev. D 81, 124040 (2010).
5. *E. Verlinde,* J. High Energy Phys. 4, 1 (2011).
6. *L. Susskind,* J. Math. Phys. 36, 6377 (1995).
7. *D. A. Easson, P. H. Frampton, G. F. Smoot,* Physics Letters B 696, 273 (2011).
8. *D. A. Easson, P. H. Frampton, G. F. Smoot,* arXiv.1003.1528 v3[hep.-th.] (2012).
9. *T. S. Koivisto, D. F. Mota, M. Zumalacárregui,* J. Cosmol. Astropart. Phys. 02, id.027 (2011).
10. *M. Akbar, R. G. Cai,* Phys. Rev. D 75, 084003 (2007).
11. *S. Basilakos, D. Polarski, J. Sola,* Phys. Rev. D 86, 043010 (2012).
12. *N. Komatsu, S. Kimura,* Phys. Rev. D 87, 043531 (2013).
13. *N. Komatsu, S. Kimura,* Phys. Rev. D 88, 083534 (2013).
14. *A. V. Kolesnichenko, M. Ya. Marov,* Mathematica Montisnigri L, 80 (2021).
15. *A. V. Kolesnichenko, M. Ya. Marov,* Astronomy Reports 66, 786 (2022).
16. *W. de Sitter,* Proc. Roy. Acad. Sci. (Amsterdam). 19, 1217 (1917).
17. *J. D. Barrow,* Physics Letters B 808, 135643 (2020).
18. *J. D. Barrow, S. Basilakos, E. N. Saridakis,* Physics Letters B 815, 136134 (2021).
19. *C. Tsallis, L. J. L. Cirto,* Eur. Phys. J. C. 73, 2487 (2013).
20. *V. G. Czinner, H. Iguchi,* Phys. Lett. B. 752, 306 (2016).
21. *G. Kaniadakis, A. M. Scarfone,* Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications 305, 69 (2002).
22. *E. M. C. Abreu, J. A. Neto,* Europhysics Letters 133, 49001 (2021).
23. *B. D. Sharma, D. P. Mittal,* J. Comb. Inform. & Syst. Sci. 2, 122 (1975).
24. *J. A. Sayahian, S. A. Moosavi, H. Moradpour, J. P. Morais Graça, I. P. Lobo, I. G. Salako, A. Jawad,* Physics Letters B 780, 21 (2018).
25. *F.K. Anagnostopoulos, S. Basilakos, E.N. Saridakis,* Eur. Phys. J. C. 80, 826 (2020).
26. *S. Basilakos, J. Sola,* Phys. Rev. D. 90, 023008 (2014).
27. *B. Hu, Y. Ling,* Phys. Rev. D. 73, 123510 (2006).
28. *Y. Wang, D. Wands, G.-B. Zhao, L. Xu,* Phys. Rev. D. 90, 023502 (2014).

29. *N. Tamanini,* Phys. Rev. D. 92, 043524 (2015).
30. *N. Komatsu, S. Kimura,* Phys. Rev. D. 93, 043530 (2016).
31. *E. Schrodinger,* Physica 6, 899 (1939).
32. *L. Parker,* Phys. Rev. Lett. 21, 562 (1968).
33. *L. Parker,* Phys. Rev. 183, 1057 (1969).
34. *N. D. Birrell,* P. C. Davies Quantum Fields in Curved Space. (Cambridge University Press, Cambridge, 1982).
35. *I. Prigogine, J. Geheniau, E. Gunzig, P. Nardone,* General Relativity and Gravitation 21, 767 (1989).
36. *M. O. Calvao, J. A. S. Lima, I. Waga,* Physics Letters A 162, 223 (1992).
37. *N. Komatsu, S. Kimura,* Phys. Rev. D 92, 043507 (2015).
38. *D. Clowe, M. Bradac, A. H. Gonzalez, M. Markevitch, S. W. Randall, C. Jones, D. Zaritsky,* Astrophys. J. 648, L109 (2006).
39. *J. Sola,* J. Phys. Conf. Ser. 453, 012015 (2013).
40. *С. Вайнберг* Гравитация и Космология. Принципы и приложения общей теорииотносительности (Волгоград, Изд-во «ПЛАТОН», 2000).
41. *B. Ryden* Introduction to Cosmology (Cambridge University Press, 2017).
42. *J. A. S. Lima, A. S. M. Germano,* Physics Letters A 170, 373 (1992).
43. *J. A. S. Lima, A. S. M. Germano, L. R. W. Abramo,* Phys. Rev. D 53, 4285 (1996).
44. *J. A. S.Lima, I. Baranov,* Phys. Rev. D 90, 043515 (2014).
45. *N. Komatsu,* Phys. Rev. D 99, 043523 (2019).
46. *S. Weinberg,* Astrophys. J. 168, 175 (1971).
47. *S. Weinberg* Gravitation and cosmology, Principles and Applications of the general Theory of Relativity (John Wiley & Sons, New York, 1972).
48. *И. Пригожин, Р. Дефей* Химическая термодинамика (Новосибирск, 1966).
49. *R. Silva, J. A. S. Lima, M. O. Calvão,* General Relativity and Gravitation 34, 865 (2002).
50. *J. Solà, A. Gómez-Valent, J. de Cruz Pérez,* Astrophys. J. 811, L14 (2015).
51. *R. G Cai, S. P. Kim,* JHEP 0502, 050 (2005).
52. *J. A. S. Lima, J. A. M. Moreira, J. Santos,* General Relativity and Gravitation 30, 425 (1998).
53. *G. Steigman, R. C. Santos, J. A. S. Lima,* JCAP 0906, 033 (2009).
54. *A. G. Riess, A. V. Filippenko, P. Challis, A. Clocchiatti, A. Diercks, P. M. Garnavich, J. Tonry,* Astron. J. 116, 1009 (1998).
55. *S. Perlmutter, M. S. Turner, M. White,* Phys. Rev. Lett. 83, 670 (1999).
56. *J. D. Barrow, T. Clifton,* Phys. Rev. D 73, 103520 (2006).
57. *G. Kaniadakis,* Phys. Rev. E 66, 056125 (2002).
58. *А. В. Колесниченко,* Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша 17, 36 (2020).
59. *А. В. Колесниченко,* Mathematica Montisnigri. XLII, 74 (2018).
60. *А. В. Колесниченко* Статистическая механика и термодинамика Тсаллиса неаддитивных систем: Введение в теорию и приложения (М.: ЛЕНАНД, 2019).
61. *Y.-F. Cai, E. Saridakis,* Physics Letters B 697, 280 (2011).
62. *T. Padmanabhan,* Rept. Prog. Phys. 73, 046901 (2010).
63. *D. F. Torres, H. Vucetich, A. Plastino,* Phys. Rev. Lett. 79, 1588 (1997).
64. *Y. Aditya, S. Mandal, P. Sahoo, D. Reddy,* Eur. Phys. J. 79, 1020 (2019).
65. *G. Wilk, Z. Wlodarczyk,* Phys. Rev. Lett. 84, 2770 (2000).
66. *S. Waheed,* Eur. Phys. J. Plus. 135, 11 (2020).
67. *E. N. Saridakis,* J. Cosmol. and Astroparticle Phys. 07, id. 031 (2020).
68. *E. N. Saridakis, S. Basilakos,* Eur. Phys. J. C. 7, 644 (2021).
69. *S. Basilakos, M. Plionis,* Sola J. Phys. Rev. D 80, 083511 (2009).
70. *A. S. Jahromi, S. Moosavi, H. Moradpour, J. M. Graca, I. Lobo, I. Salako, A. Jawad,* Physics Letters B 780, 056125 (2018).
71. *N. Komatsu,* Phys. Rev. D 96, 103507 (2017).
72. *N. Komatsu,* Eur. Phys. J. C. 77, 229 (2017).
73. *А. В. Колесниченко, М. Я. Маров,* Астрон. журн. 99, 740 (2022).
74. *R. C. Nunes, E. M. Barboza, E. M. C. Abreu, J. A. Neto,* J. Cosmol. and Astroparticle Phys. 08, 051 (2016).
75. *T. Padmanabhan,* Modern Physics Letters A 25, 1129 (2010).
76. *E. M. C. Abreu, J. A. Neto, A. C. R. Mendes, R. M. de Paula,* Chaos, Solitons & Fractals 118, 307 (2019).
77. *T. Padmanabhan, S. M. Chitre,* Physics Letters A 120, 433 (1987).
78. *B. Li, J. Barrow,* Phys. Rev. D 79, id. 103521 (2009).
79. *A. Avelino, U. Nucamendi,* J. Cosmol. and Astroparticle Phys. 08, id. 009 (2010).
80. *X.-H. Meng, X. Dou,* Communicationsin Theoretical Physics 52, 377 (2009).
81. *X. Dou, X.-H. Meng,* Adv. Astron. 2011, 829340 (2011).

82. *G. Kaniadakis, P. Quarati, A.M. Scarfone,* Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications 305, 76 (2002).

83. *A.V. Kolesnichenko,* Mathematica Montisnigri XLVIII, 118 (2020).

84. *G. Kaniadakis,* Entropy 15, 3983 (2013).

85. *E. M. C. Abreu, J. A. Neto, E. M. Jr. Barboza, A. C. R. Mendes, B. B. Soares,* Modern Physics Letters A 35, 2050266 (2020).

86. *E. M. C. Abreu, J. A. Neto,* arXiv:2107.04869v2 [gr-qc] (2021).

87. *И. С. Градштейн, И. М. Рыжик* Таблицы интегралов сумм рядов и произведений (М.: Физматгиз, 1963).

88. *М. Я. Маров* Космос: От Солнечной системы вглубь Вселенной (М.: Физматгиз, 2018).

CONSTRUCTING AN ENTROPY-FORCE MODEL OF THE EXPANSION OF THE UNIVERSE DUE TO GRAVITATIONALLY INDUCED PRODUCTION OF DARK MATTER

M. Y. Marov[a], A.V. Kolesnichenko[b,*]

[a]*Vernadsky Institute of Geochemistry and Analytical Chemistry, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

[b]*Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

**E-mail: kolesn@keldysh.ru*

In the framework of entropic cosmology and Prigozhin’s gravitational theory about the connection between geometry and matter, providing the production of particles in the cosmological fluid, as well as in the assumption of exchange entropy at the event horizon, a one-liquid model of the evolution of a spatially flat, homogeneous and isotropic Universe is constructed. For its construction the energy conservation equation is derived from the first law of thermodynamics taking into account gravitationally induced creation of matter and exchange energy processes on the visible horizon of the Universe. On the basis of the energy equation and the fundamental Friedman equation describing the expansion of the Universe, modified Friedman-Robertson-Walker equations have been constructed in the context of the entropic formalism, designed for modelling various dynamical aspects of the evolution of the Universe taking into account adiabatic creation of matter. Several forms of exchangeable phenomenological non-extensive entropies associated with the region of the apparent cosmological horizon were used in their derivation. The obtained evolutionary model, consistent with the standard Λ-model for cold dark matter, is intended to describe without introducing new fields the accelerated expansion of the late Universe, providing its cosmological history.

Keywords: Einstein’s general theory of relativity, entropic cosmology, non-extensive exchange entropy, gravity-induced creation of matter