АСТРОНОМИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2023, том 100, № 11, с. 1023–1032

МАСШТАБНО-ИНВАРИАНТНАЯ МОДА В БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ЗВЕЗДНЫХ СИСТЕМАХ

Е. В. Поляченко[1,*], И. Г. Шухман[2,]**

[1]*Институт астрономии Российской академии наук, Москва, Россия*

[2]*Институт солнечно-земной физики Российской академии наук СО РАН, Иркутск, Россия*

**E-mail: epolyach@inasan.ru*

***E-mail: shukhman@iszf.irk.ru*

Поступила в редакцию 28.07.2023 г.
После доработки 19.09.2023 г.
Принята к публикации 19.09.2023 г.

Получено аналитическое решение возмущенных уравнений, существующее во всех эргодических моделях бесстолкновительных сферических звездных систем с единственным параметром длины. Данное решение соответствует вариациям этого параметра, т.е. растяжению/сжатию сферы при сохранении полной массы. При этом система остается в равновесном состоянии. Простота решения позволяет в явном виде дать выражения для функции распределения, потенциала и плотности во всех порядках теории возмущений. Это, в свою очередь, помогает внести ясность в понятие энергии возмущения, которая, являясь величиной второго порядка по амплитуде, не может быть вычислена в линейной теории. Показано, что корректное выражение для энергии возмущений, построенное с учетом возмущений 2-го порядка, и известное в литературе выражение для энергии возмущений в виде квадратичной формы, полученное в рамках линейной теории из возмущений 1-го порядка, не совпадают. Однако обе эти энергии являются интегралами движения и отличаются лишь на константу. Полученное решение можно использовать для контроля корректности кодов и точности вычислений при численном исследовании бесстолкновительных звездных моделей.

Ключевые слова: звездные системы, звездные скопления и ассоциации, звездная динамика

DOI: 10.31857/S0004629923110087, **EDN:** HISEKZ

1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из традиционных методов исследования динамики возмущений равновесных моделей сферических звездных систем является исследование эволюции малых возмущений. Как правило, основной вопрос, интересующий исследователей, это устойчиво или неустойчиво равновесное состояние, описываемое функцией распределения (ФР) звезд $F(\mathbf{r},\mathbf{v})$ и гравитационным потенциалом $\Phi_0(\mathbf{r})$. Наряду с методами, состоящими в нахождении общих критериев устойчивости с помощью вывода соответствующих теорем (см., напр., монографию [1], далее BT, и цитированные там работы), существует метод решения линеаризованной задачи на собственные значения. Для этого, предполагая, что возмущения гравитационного потенциала $\Phi(\mathbf{r},t)$ и ФР $f(\mathbf{r},\mathbf{v},t)$ малы и пропорциональны $\exp(-i\omega t)$, находят собственные значения ω линеаризованной системы уравнений, состоящей из бесстолкновительного кинетического уравнения и уравнения Пуассона. Наличие собственных значений с $\mathrm{Im}(\omega) > 0$ означает неустойчивость системы.

Поиск собственных значений ω является довольно трудоемкой задачей. За исключением нескольких моделей, где равновесный потенциал является гармоническим (см., напр., [2–5]), она решается с помощью так называемых матричных методов. Здесь задача сводится к численному нахождению корней ω некоего определителя, $\mathcal{D}(\omega) \equiv \det\left\|D^{\alpha\beta}(\omega)\right\| = 0$, $\alpha,\beta = 1,2,3....$ Для дисковых моделей матричный метод был впервые предложен Калнайсом [6], а для сферических систем Поляченко и Шухманом [7]. Он состоит в разложении амплитуд $\hat{\Phi}(\mathbf{r})$ и $\hat{\rho}(\mathbf{r})$ – возмущенных потенциала и плотности, $\Phi(\mathbf{r},t) = \hat{\Phi}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$ и $\rho(\mathbf{r},t) = \hat{\rho}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$, по так называемому биортонормальному набору базисных пар потенциал–плотность, $\Phi^{\alpha}(r)$ и $\rho^{\alpha}(r)$, и получении системы линейных уравнений на коэффициенты разложения C^{α}. Равенство нулю определителя этой системы и приводит к искомому дисперсионному соотношению. Этот метод работает для систем с интегрируемым гамильтонианом H_0, т.е. для равновесных звездных систем, потенциал $\Phi_0(\mathbf{r})$ которых допускает переход от переменных координата–скорость, $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$, к переменным действие–угол $(\mathbf{J}, \mathbf{w})$. В альтернативном матричном методе, предложенном Е. Поляченко (см. [8, 9]), исходная система линеаризованных уравнений сводится к стандартной линейной задаче на собственные значения вида $\omega f_n(\mathbf{J}) = = \sum_{n'} \int d\mathbf{J}' \, K_{nn'}(\mathbf{J}, \mathbf{J}') f_{n'}(\mathbf{J}')$, где $f_n(\mathbf{J})$ – гармоники Фурье-разложения возмущенной ФР по угловым переменным $\mathbf{w}$, а $K_{nn'}(\mathbf{J}, \mathbf{J}')$ – ядро.

В последнее время появился ряд работ [10–13], изучающих динамику возмущений на фоне равновесных моделей не с целью исследованиях их устойчивости, как это происходило в течение предшествующих десятилетий и было отражено в многочисленных работах и монографиях (см., напр., [1, 14, 15] и цитированные там работы), а с целью изучения флуктуаций плотности и потенциала вокруг равновесия, и их влияния на процессы медленной релаксации, а также их роль в процессе N-body численного моделирования процессов в звездных системах. В качестве равновесных моделей рассматриваются заведомо устойчивые системы, а возмущения в них могут быть вызваны либо шумом, связанным с конечным числом частиц N [12], либо внешним воздействием. В этом случае представляют интерес слабозатухающие колебания, которые могут длиться в течение многих характерных времен пролета, практически не отличаясь от настоящих нейтральных собственных мод [16, 17].

В случае устойчивых равновесных сферических систем не существует дискретных мод с $\mathrm{Im}(\omega) > 0$. Вследствие обратимости бесстолкновительного кинетического уравнения во времени не существует и затухающих дискретных мод $\mathrm{Im}(\omega) < 0$. Присутствие дискретных нейтральных мод, $\mathrm{Im}(\omega) = 0$ возможно лишь в редких ситуациях. Это связано с наличием резонансов волн возмущения с орбитальным движением звезд типа $\omega - \mathbf{n}\Omega = 0$, где $\Omega(\mathbf{J}) = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$ – частоты орбитального движения, а $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ – целые числа, поэтому нейтральные дискретные моды возможны лишь при наличии “щелей” в фазовом пространстве, свободных от резонанса[1]. Оказывается, что для таких равновесных моделей полная система собственных мод представлена исключительно непрерывным спектром мод ван Кампена [19] с вещественной частотой ω. Заметим, что возмущение, убывающее экспоненциально согласно так называемому затуханию Ландау [20], при котором частота ω_{L} имеет отрицательную мнимую часть, $\omega_{\mathrm{L}} = \mathrm{Re}(\omega_{\mathrm{L}}) + i\mathrm{Im}(\omega_{\mathrm{L}})$, $\mathrm{Im}(\omega_{\mathrm{L}}) < 0$, не является истинной затухающей собственной модой, а представляет континуальную суперпозицию сингулярных мод ван Кампена. Чтобы отличить возмущение, затухающее по Ландау, от истинной собственной моды, будем назвать его квазимодой. Более детально динамика начальных возмущений, представленных в виде суперпозиции мод ван Кампена, и ее связь с квазимодами Ландау для бесконечных однородных гравитирующих систем прослежена нами в работе [21], а для случая сдвиговых течений жидкости в работе [22].

[1] Мазур [18], рассматривая радиальные возмущения, привел аргументы в пользу того, что такие нейтральные моды, в принципе, возможны, однако не привел конкретных примеров соответствующих ФР.

Для устойчивых систем наличие слабозатухающих квазимод Ландау играет существенную роль. В терминах мод ван Кампена их наличие означает, что их амплитуда особенно велика, когда частоты ω мод ван Кампена близки к реальной части частоты квазимоды Ландау: $\omega \approx \mathrm{Re}(\omega_{\mathrm{L}})$. С другой стороны, их наличие позволяют колебаниям, возбужденным, скажем, близким прохождением возмущающего внешнего тела, длиться достаточно долгое время практически без затухания [16].

Поэтому поиск квазимод Ландау для устойчивых систем представляет интерес. Однако с практической точки зрения нахождение квазимод Ландау вызывает существенные трудности. Дело в том, что дисперсионное уравнение, полученное любым из описанных выше матричных методов [7–9], верно только в верхней полуплоскости комплексной переменной ω, в то время как частоты квазимод Ландау лежат в нижней полуплоскости ω. Этот факт связан с принципом причинности и неоднократно описан в литературе, начиная с пионерской работы Ландау [20] (см. также ВТ [1]). Для того, чтобы использовать дисперсионное уравнение $\mathcal{D}(\omega) = 0$ для нахождения частот квазимод Ландау, необходимо выполнить аналитическое продолжение функции $D(\omega)$ в нижнюю полуплоскость комплексной переменной ω. Ландау [20] впервые проделал эту процедуру для однородной электронной плазмы. Для этого он деформировал контур интегрирования по (единственной в его задаче) переменной скорости v, сдвигая его в комплексную плоскость v так, чтобы он проходил ниже всех возможных точек резонанса $v_c \equiv \omega_{\mathrm{L}}/k$. Эта процедура названа правилом обхода Ландау–Линя, поскольку Линь [23] вывел то же правило обхода для сдвиговых течений невязкой жидкости, но исходя не из принципа причинности (означающего, что возмущение должно исчезать в далеком прошлом), как Ландау, а из принципа диссипативности (т.е. с помощью добавления в невязкое уравнение Эйлера бесконечно малой положительной вязкости).

Задача нахождения аналитического продолжения $\mathcal{D}(\omega)$ для равновесных сферических звездных систем гораздо более сложна, чем в однородной плазме [20], в бесконечной однородной гравитирующей среде [21] или в сдвиговых течениях жидкости [22]. Во-первых, дело в том, что даже в простейшем случае самосогласованных моделей мы имеем дело как минимум с двумерным фазовым пространством в переменных действий $\mathbf{J}$, а не с одномерным, где приходится работать с интегралами, содержащими лишь единственную компоненту скорости, параллельную фиксированному направлению волнового вектора $\mathbf{k}$. Вторая проблема, делающая процедуру построения аналитического продолжения более сложной, связана с наличием в подынтегральных выражениях интегралов по фазовому объему не единственного резонансного знаменателя вида $1/(\omega - kv)$, а бесконечного их числа вида $1/[\omega - \mathbf{n}\cdot\mathbf{\Omega}(\mathbf{J})]$. Первую из этих проблем обошли Барре и др. [24], рассмотрев одномерно неоднородную систему с искусственным, достаточно простым одномерным потенциалом взаимодействия между частицами (не гравитационным), сведя задачу к одномерной, хотя и с большим числом резонансных знаменателей типа $1/[\omega - n\Omega(J)]$.

Для сферических систем с реальным гравитационным потенциалом (более точно, для моделей Кинга [25]) попытку построения аналитического продолжения детерминанта $\mathcal{D}(\omega)$ в нижнюю полуплоскость предпринял Вайнберг [16]. Для этого он аппроксимировал функцию $\mathcal{D}(\omega)$ в верхней полуплоскости суммой дробно-рациональных функций, допускающих простое аналитическое продолжение в нижнюю полуплоскость и, получив приближенное выражение для аналитического продолжения $\mathcal{D}(\omega)$, нашел (при определенных параметрах моделей) частóты слабо затухающих квазимод Ландау. Хотя результаты этой работы широко цитируются в литературе, с нашей точки зрения они не являются достаточно убедительными.

Еще один способ обнаружить экспоненциальное затухание Ландау состоит в прямом решении эволюционного уравнения (точнее, системы уравнений) для Фурье-гармоник возмущенной ФР $f_n(J,t)$. Для этого необходимо задать начальную ФР $f(\mathbf{J},0)$ и соответствующий возмущенный потенциал $\Phi(\mathbf{r},0)$. Если рассматриваемое равновесное состояние содержит квазимоду Ландау, она должна проявиться при любом выборе начальной ФР, поскольку детерминант $\mathcal{D}(\omega)$ зависит только от свойств невозмущенной системы, и наличие у него нулей в нижней полуплоскости означает, что асимптотически возмущения плотности и потенциала должны затухать экспоненциально. Это следует из того, что нули $\mathcal{D}(\omega)$ являются полюсами Лаплас-образа возмущения. Соответствующая процедура решения эволюционного уравнения для бесконечной однородной среды [21] и для сдвиговых течений жидкости [22] была проделана в явном виде и продемонстрировала полное соответствие асимптотического поведения амплитуды $\hat{\rho}_k(t)$ возмущения плотности звезд $\rho(x,t) = \hat{\rho}_k(t)e^{ikx}$ или амплитуды полной завихренности поперек канала $N_k(t) = \int dy\hat{\zeta}_k(y,t)$ затуханию Ландау с частотой $\omega_{\rm L}$, найденной из условия $\mathcal{D}(\omega) = 0$.

Сказанное выше означает, что проблема численного исследования динамики возмущения в устойчивых системах является довольно сильно зависящей от выбранных кодов и счетных параметров: сетке на плоскости фазовых переменных, количеству удерживаемых Фурье-гармоник по переменным $\mathbf{w}$, а также количеству удерживаемых базисных функций. Поэтому наличие тестового возмущения для верификации кодов крайне желательно. Одно такое тестовое возмущение давно известно. Оно состоит в сдвиге сферической системы как целого. Если этот сдвиг происходит, скажем, по оси z на малое расстояние ξ, то возмущения плотности и потенциала, возникающие при этом, есть $\rho(r,\theta) = -\xi\rho_0'(r)\cos\theta$, $\Phi(r,\theta) = -\xi\Phi_0'(r)\cos\theta$. Это дипольное сдвиговое возмущение, соответствующее сферической гармонике $P_{l=1}(\cos\theta) = \cos\theta$. Очевидно, что собственная частота ω, соответствующая этому возмущению, равна нулю. Этот тест неоднократно использовался ранее при верификации кодов при исследовании устойчивости (см., напр., [26–28]).

В настоящей работе мы предлагаем еще одно простое тестовое возмущение, допускающее точное решение. Оно работает для вполне определенного класса сферических моделей, а именно, для моделей, описываемых ФР, зависящими только от энергии E и содержащих единственный параметр длины b.

Это точное решение позволяет попутно прояснить еще один вопрос, касающийся корректного определения понятия энергии возмущения. Дело в том, что энергия возмущений, являясь квадратичной по амплитуде величиной, на первый взгляд в принципе не может быть вычислена в линейной теории. Однако можно показать, что система линеаризованного кинетического уравнения и уравнения Пуассона допускает квадратичный интеграл движения, по форме очень напоминающий полную энергию возмущения, который, строго говоря, не совпадает с настоящей энергией, поскольку ее вычисление требует знания возмущений ФР, потенциала и плотности второго порядка. Предлагаемое тестовое возмущение позволяет вычислить энергию возмущения в любом порядке и выполнить сравнение этих двух “энергий” второго порядка.

В разделе 2 мы представим идею тестового возмущения и приведем несколько примеров моделей самосогласованных равновесных ФР, в спектре которых рассматриваемая мода присутствует. В разделе 3 мы более подробно рассмотрим вопрос о понятии энергии возмущений, который можно построить в рамках линейной теории, и на примере масштабно инвариантного возмущения проведем сравнение честно вычисленной энергии (с учетом возмущений второго порядка) с общепринятым выражением для энергии возмущения, принимаемым в линейной теории. В разделе 4 обсуждаются полученные результаты.

2. ИДЕЯ ТЕСТОВОГО ВОЗМУЩЕНИЯ И НЕСКОЛЬКО ПРИМЕРОВ РЕЛЕВАНТНЫХ МОДЕЛЕЙ ФР

Пусть сферическая модель описывается равновесной ФР, содержащей единственный характерный масштаб по радиальной переменной r. Назовем его масштабным фактором и обозначим как b. Для таких моделей невозмущенные потенциал и плотность имеют вид:

$$\Phi_0(r,b) = \frac{MG}{b}\phi\left(\frac{r}{b}\right),\quad \rho_0(r,b) = \frac{M}{b^3}\varrho\left(\frac{r}{b}\right), \tag{1}$$

причем, $\phi(x)$ и $\varrho(x)$ связаны уравнением Пуассона,

$$\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left[x^2\frac{d\phi(x)}{dx}\right] = 4\pi\varrho(x). \tag{2}$$

Функция распределения есть

$$F_0(\mathcal{E},b) = \frac{1}{(MGb)^{3/2}}\mathcal{F}(\mathcal{E}),\quad 0 \le \mathcal{E} \le \Psi(0) \equiv -\phi(0), \tag{3}$$

где безразмерную энергию $-\mathcal{E}$ надо тоже рассматривать как функцию v, r и масштабного фактора b:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(r,v;b) = -\frac{b}{MG}\left[\frac{1}{2}v^2 + \Phi_0(r,b)\right] = -\frac{b}{MG}\left[\frac{1}{2}v^2 + \frac{MG}{b}\phi\left(\frac{r}{b}\right)\right]. \tag{4}$$

Здесь безразмерная функция $\mathcal{F}(\mathcal{E})$ нормирована так, что $\int \mathcal{F} d^3\mathbf{r}\, d^3\mathbf{v} = 1$.

Совершенно ясно, что если фиксировать полную массу M, но изменить b, мы получим ту же самую равновесную модель, но только с другим масштабным фактором, $b + \delta b$. Но это означает, что собственная частота моды ω, соответствующей такому расширению/сжатию, равна нулю. Этот факт может служить тестом различных кодов при исследовании динамики возмущений в сферических системах.

Приведем для примера несколько моделей, имеющих такую форму.

- **Изохронная модель Энона [29]**

Для нее функция, входящая в потенциал, $\phi(x)$, есть:

$$\phi(x) = -\frac{1}{1+a},\quad a = \sqrt{1+x^2}, \tag{5}$$

плотность:

$$\varrho(x) = \frac{1}{4\pi}\frac{1+2a}{(1+a)^2a^3}, \tag{6}$$

функция распределения:

$$\mathcal{F}_{\mathrm{He'non}}(\mathcal{E}) = \frac{1}{\sqrt{2}(2\pi)^3}\frac{\sqrt{\mathcal{E}}}{[2(1-\mathcal{E})]^4}\left[64\mathcal{E}^4 - 240\mathcal{E}^3 + 320\mathcal{E}^2 - 66\mathcal{E} + 27 + 3(16\mathcal{E}^2 + 28\mathcal{E} - 9)\frac{\arcsin\sqrt{\mathcal{E}}}{\sqrt{\mathcal{E}(1-\mathcal{E})}}\right],\quad 0 \le \mathcal{E} \le \frac{1}{2}. \tag{7}$$

- **Модель Хернквиста [30]**

Для нее потенциал:

$$\phi(x) = -\frac{1}{1+x}, \tag{8}$$

плотность:

$$\varrho(x) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{x(1+x)^3}, \tag{9}$$

функция распределения:

$$\mathcal{F}_{\mathrm{Hernquist}}(\mathcal{E}) = \frac{1}{\sqrt{2}(2\pi)^3}\frac{\sqrt{\mathcal{E}}}{(1-\mathcal{E})^2}\times\left[(1-2\mathcal{E})(8\mathcal{E}^2 - 8\mathcal{E} - 3) + \frac{3\arcsin\sqrt{\mathcal{E}}}{\sqrt{\mathcal{E}(1-\mathcal{E})}}\right],\quad 0 \le \mathcal{E} \le 1. \tag{10}$$

- **Модель Яффе [31]**

Для нее потенциал:

$$\phi(x) = -\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right), \tag{11}$$

плотность:

$$\varrho(x) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{x^2(1+x)^2}, \tag{12}$$

функция распределения:

$$\mathcal{F}_{\text{Jaffe}}(\mathcal{E}) = \frac{1}{2\pi^3}[F_-(\sqrt{2\mathcal{E}}) - \sqrt{2}F_-(\sqrt{\mathcal{E}}) - \\ - \sqrt{2}F_+(\sqrt{\mathcal{E}}) + F_+(\sqrt{2\mathcal{E}})], \quad 0 \le \mathcal{E} < \infty, \tag{13}$$

где

$$F_\pm(x) = e^{\mp x^2}\int_0^x dy e^{\pm y^2}. \tag{14}$$

- **Модель Пламмера [32]**

Для нее потенциал:

$$\phi(x) = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \tag{15}$$

плотность:

$$\varrho(x) = \frac{3}{4\pi}\frac{1}{(1+x^2)^{5/2}}, \tag{16}$$

функция распределения:

$$\mathcal{F}_{\text{Plummer}}(\mathcal{E}) = A\mathcal{E}^{7/2}, \\ A = \frac{3}{7}\frac{2^7}{\sqrt{2}(2\pi)^3}, \\ 0 \le \mathcal{E} \le \Psi(0) = 1. \tag{17}$$

- **Политропы**

Заметим, что модель Пламмера является частным случаем серии политропных моделей с функцией распределения:

$$\mathcal{F}_{\text{polytropes}}(\mathcal{E}) = A_n\mathcal{E}^{n-3/2} \tag{18}$$

и плотностью:

$$\varrho(x) = \Lambda_n A_n \Psi^n(x), \\ \Lambda_n = \frac{1}{n!}(2\pi)^{3/2}\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right), \tag{19}$$

соответствующим $n = 5$. В случае произвольных n для этих моделей нет явного аналитического выражения для потенциала $\phi(x)$, но есть соответствующее нелинейное уравнение 2-го порядка для потенциала, следующее из уравнения Пуассона (уравнение Лейна–Эмдена). Его исследование показывает (см. BT), что политропные модели с $n > 5$ имеют бесконечную массу и нерелевантны. Однако модели с $1/2 < n < 5$, которые хотя и обладают (в отличие от моделей, приведенных выше) конечным радиусом b, тем не менее тоже должны содержать в спектре масштабно-инвариантную моду, поскольку этот радиус является единственным масштабом длины в модели. В частности, для $n = 1$, когда уравнение Лейна–Эмдена становится линейным, существует аналитическое решение с конечными радиусом и массой:

$$\phi(x) = -\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}, \quad \varrho(x) = \frac{\sin(\pi x)}{4x}, \quad x \le 1, \tag{20}$$

$$\mathcal{F}(\mathcal{E}) = \frac{1}{16\pi}\mathcal{E}^{-1/2}, \quad 0 \le \mathcal{E} \le 1. \tag{21}$$

Обратим внимание, что модели с $n < 3/2$ имеют положительный знак производной по энергии $E = -\frac{MG}{b}\mathcal{E}$, т.е. $\mathcal{F}'(\mathcal{E}) < 0$, и, в принципе, могут оказаться неустойчивыми. Мы не будем здесь более подробно обсуждать этот вопрос.

Рассмотрим изменение параметров модели, связанное с вариацией масштабного фактора b, $b = b_0 + \delta b$:

$$\Phi(r,b) = \Phi_0(r,b_0) + \epsilon\Phi_1(r,b_0) + \\ + \epsilon^2\Phi_2(r,b_0) + \mathbb{O}(\epsilon^3), \tag{22}$$

$$\rho(r,b) = \rho_0(r,b_0) + \epsilon\rho_1(r,b_0) + \\ + \epsilon^2\rho_2(r,b_0) + \mathbb{O}(\epsilon^3), \tag{23}$$

$$F(\mathcal{E},b) = F_0(\mathcal{E},b_0) + \epsilon f_1(\mathcal{E},b_0) + \\ + \epsilon^2 f_2(\mathcal{E},b_0) + \mathbb{O}(\epsilon^3). \tag{24}$$

Здесь $\epsilon = \delta b/b_0 \ll 1$ – параметр разложения. Заметим, что мы заготовили разложение всех величин вплоть до второго порядка. Хотя в линейной теории знание величин второго порядка не требуется, мы делаем это с целью получения корректного выражения для потенциальной и кинетической энергий, которые являются величинами 2-го порядка по амплитуде возмущения ϵ, и не могут быть вычислены просто как билинейная форма из величин 1-го порядка. Полагая далее $G = M = 1$, имеем для потенциала:

$$\Phi_1 = -\frac{1}{b_0}(x\phi)', \\ \Phi_2 = \frac{1}{2b_0}[2(x\phi)' + x(x\phi)''], \tag{25}$$

для плотности:

$$\rho_1 = -\frac{1}{b_0^3}(3\varrho + x\varrho'), \\ \rho_2 = \frac{1}{b_0^3}\left(6\varrho + 4x\varrho' + \frac{1}{2}x^2\varrho''\right), \tag{26}$$

для функции распределения:

$$f_1 = \frac{1}{b_0^{3/2}}\left\{-\frac{3}{2}\mathcal{F} + \mathcal{F}'(\mathcal{E})[\mathcal{E} + (x\phi)']\right\}, \tag{27}$$

$$f_2 = \frac{1}{2b_0^{3/2}}\left\{\frac{15}{4}\mathcal{F} - \mathcal{F}'[3\mathcal{E} + 3(x\phi)' + x(x\phi)''] + \right. \left. + \mathcal{F}'[\mathcal{E} + (x\phi)']^2\right\}. \quad (28)$$

Штрих у функций означает производную по соответствующему аргументу. Далее без ограничения общности можно принять $b_0 = 1$ и записать, используя (25):

$$f_1 = \left\{-\frac{3}{2}\mathcal{F}(\mathcal{E}) + \mathcal{F}'(\mathcal{E})[\mathcal{E} - \Phi_1(x)]\right\}. \quad (29)$$

Несложно убедиться в том, что возмущение массы системы, обязанное такому возмущению ФР и плотности, действительно, равно нулю как в 1-м, так и во 2-м порядках: $\int d^3\mathbf{r}\int d^3\mathbf{v} f_{1,2} = 0$.

Возмущения величин первого порядка Φ_1, ρ_1 и F_1 представляют собой тестовое возмущение, которое в задаче на собственные значения соответствует собственной частоте $\omega = 0$. Если же исследовать динамику возмущений с помощью решения системы эволюционных уравнений на амплитуды Фурье-гармоник возмущенной ФР f_n, задавая начальную ФР в виде (27), а потенциал в виде (25), мы должны получить $\partial f_n/\partial t = 0$.

Действительно, линеаризованное кинетическое уравнение для радиальных возмущений $f \equiv F_1$ и $\Phi \equiv \Phi_1$ в переменных действие–угол имеет вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\Omega\frac{\partial}{\partial w}(f + \mathcal{F}'\Phi), \quad (30)$$

где $\Omega \equiv \Omega_R(\mathcal{E}, L)$ – частота, соответствующая радиальному действию J_R, $\Omega_R = \partial H_0/\partial J_R$; $L = J_\theta + |J_\phi|$ – угловой момент, а $w \equiv w_R$ – угловая переменная, сопряженная радиальному действию, $dw/dt = \Omega$. В гармониках имеем

$$\frac{\partial f_n}{\partial t} = -in\Omega(f_n + \mathcal{F}'\Phi_n), \quad (31)$$

где

$$f_n(\mathcal{E}, L; t) = \oint dw\, f(\mathcal{E}, L, w, t)e^{-inw},$$
$$\Phi_n(\mathcal{E}, L; t) = \oint dw\, \Phi(\mathcal{E}, L, w, t)e^{-inw},$$
$$\Phi(\mathcal{E}, L, w, t) \equiv \Phi(r(\mathcal{E}, L, w), t).$$

Из (29) имеем

$$f_n(\mathcal{E}, L) = -\mathcal{F}'(\mathcal{E})\Phi_n(\mathcal{E}, L), \quad n \neq 0, \quad (32)$$

для ненулевых гармоник. С помощью (31) убеждаемся, что, действительно, $\partial f_n/\partial t = 0$ при всех n, как и должно быть.

Итак, мы показали, что возмущенная ФР для тестового возмущения, действительно, остается постоянной при решении эволюционного уравнения, или является собственной функцией задачи на собственные значения с собственным значением $\omega = 0$.

Тест уравнения (31) реально был выполнен на изохронной модели (7), для которой достаточно просто получить аналитические выражения, связывающие радиальную координату r с переменными угол–действие, или, что здесь эквивалентно, с переменными $\mathcal{E}$, L и радиальной угловой переменной[2] w. Зная параметрическую связь r с w

$$r(\mathcal{E}, L, \xi) = \sqrt{\left(\frac{1 - p\cos\xi}{2\mathcal{E}}\right)^2 - 1},$$
$$w = \xi - p\sin\xi, \quad p = \sqrt{(1 - 2\mathcal{E})^2 - 2\mathcal{E}L^2}, \quad (33)$$
$$-\pi \le \xi \le \pi \quad \text{и} \quad -\pi \le w \le \pi,$$

можно численно выполнить разложение по Фурье-гармоникам радиальной угловой переменной w. Задавая в качестве начального возмущения ФР f_1 и потенциала Φ_1 функции (27) и (25) соответственно и разлагая их по гармоникам,

$$f_1(\mathcal{E}, L, w) = (2\pi)^{-1}\sum f_n(\mathcal{E}, L; 0)e^{inw},$$
$$\Phi_1(\mathcal{E}, L; w) = (2\pi)^{-1}\sum \Phi_n(\mathcal{E}, L; 0)e^{inw},$$

действительно, получаем, что $f_n(\mathcal{E}, L; t) = f_n(\mathcal{E}, L; 0)$.

Кроме того, для этой модели выполнен контроль сохранения полной массы, т.е. обращение в нуль интеграла от нулевой гармоники возмущенной ФР по допустимой области фазовой плоскости $\varpi \equiv (\mathcal{E}, L)$ модели, $M_1 = (2\pi)^2\int d^2\varpi\, f_{n=0}(\mathcal{E}, L) = 0$:

$$M_1 = (2\pi)^2\int\limits_0^{1/2}\frac{d\mathcal{E}}{\Omega(\mathcal{E})}\int\limits_0^{L^2_{\rm circ}(\mathcal{E})} d(L^2)\left\{2\pi\left[-\frac{3}{2}\mathcal{F}(\mathcal{E}) + \right.\right. \left.\left. + \mathcal{E}\mathcal{F}'(\mathcal{E})\right] - \mathcal{F}'(\mathcal{E})\Phi_{n=0}(\mathcal{E}, L)\right\} = 0,$$

где $L_{\rm circ}(\mathcal{E}) = \dfrac{1 - 2\mathcal{E}}{\sqrt{2\mathcal{E}}}$ – линия круговых орбит, а $\Phi_{n=0}(\mathcal{E}, L) = 2\pi\dfrac{(2\mathcal{E})^{3/2}}{\sqrt{4 + L^2}}$.

3. ЭНЕРГИЯ ВОЗМУЩЕНИЯ

В этом разделе мы хотим на примере тестового возмущения проверить корректность выражения для энергии, которое, являясь величиной второго порядка, тем не менее строится из возмущений

[2] Дополнительные преимущества изохронной модели состоят в том, что для нее существуют явные аналитические выражения, связывающие гамильтониан $H_0(\mathbf{J}) = E$ с переменными действия $\mathbf{J} = (J_R, J_\theta, J_\phi)$ (см. [1], eq. (3.226)), а радиальная частота $\Omega(\mathbf{J})$ зависит только от энергии, $\Omega = [-2E(\mathbf{J})]^{3/2}$ $(M = G = b = 1)$.

только первого порядка. Начнем с гравитационной потенциальной энергии. Для рассматриваемых нами моделей с единственным масштабным параметром b имеем

$$W = \frac{GM^2}{b}V,\qquad V = -\frac{1}{2}\int x^2[\phi'(x)]^2dx. \tag{34}$$

Разлагая W в ряд Тейлора по $\epsilon = \delta b/b_0$, и полагая $G = M = b_0 = 1$, имеем $\delta W = \epsilon W_1 + \epsilon^2 W_2 + \mathbb{O}(\epsilon^3)$, где

$$W_1 = -V,\quad W_2 = V. \tag{35}$$

Подчеркнем, что выражения (35) дают корректные выражения для возмущений потенциальной энергии 1-го и 2-го порядка. В частности, именно с выражением для $\epsilon^2 W_2$ необходимо сравнить билинейную форму $\tilde{W} = \frac{1}{2}G\epsilon^2\int d^3\mathbf{r}\rho_1(\mathbf{r})\Phi_1(\mathbf{r}) = -(8\pi)^{-1}\epsilon^2\int d^3\mathbf{r}[\nabla\Phi_1(\mathbf{r})]^2$, которую в литературе принято называть потенциальной энергией возмущения. С другой стороны, зная явные выражения (25) для $\Phi_{1,2}(\mathbf{r})$, мы имеем возможность проверить правильность выражения (35) непосредственным интегрированием. В 1-м порядке $W_1 = -\int dx x^2\Phi_0'(x)\Phi_1'(x)$, или, после подстановки $\Phi_0' = \phi'$, $\Phi_1' = -(x\phi)''$,

$$W_1 = \frac{1}{2}\int x^2\phi'^2dx = -V, \tag{36}$$

как и должно быть, согласно (35). Во 2-м порядке

$$W_2 = -\frac{1}{2}\int x^2[\Phi_1'^2(x) + 2\Phi_0'(x)\Phi_2'(x)]dx, \tag{37}$$

где, учитывая, что (см. (25)) $\Phi_2' = \frac{1}{2x^2}[x^3(x\phi'')]'$, получим после цепочки интегрирований по частям

$$W_2 = -\frac{1}{2}\int x^2\phi'^2dx = V < 0. \tag{38}$$

Снова получилось $W_2 = V$, как и должно быть, согласно (35). Итак, мы убедились на примере тестового возмущения, что правильное выражение для потенциальной энергии второго порядка W_2 получается лишь при учете вклада в (37) потенциала второго порядка Φ_2. Это означает, что билинейная форма

$$\epsilon^2\tilde{W}_2 = -\frac{1}{2}\epsilon^2\int x^2\Phi_1'^2(x)dx, \tag{39}$$

составленная только из возмущений 1-го порядка, не является потенциальной энергией 2-го порядка.

С другой стороны, можно показать, не выходя за рамки линейного приближения, что для возмущений в системах с эргодической ФР $F(E)$ ($F'(E) < 0$) при отсутствии внешних сил существует квадратичный интеграл движения[3]:

$$\tilde{E}_{\rm pert} = \epsilon^2(\tilde{T}_2 + \tilde{W}_2), \tag{40}$$

где

$$\tilde{T}_2 = \frac{1}{2}\int\frac{f_1^2d^3\mathbf{r}d^3\mathbf{v}}{-dF_0/dE},\qquad \tilde{W}_2 = \frac{1}{2}\int d^3\mathbf{r}\Phi_1(\mathbf{r})\rho_1(\mathbf{r}) = -\frac{1}{8\pi}\int d^3\mathbf{r}[\nabla\Phi_1(\mathbf{r})]^2. \tag{41}$$

Это выражение для $\tilde{E}_{\rm pert}$ можно получить, рассматривая работу, выполняемую над системой внешней силой $-\epsilon\nabla\Phi_{\rm ext}$, считающейся величиной 1-го порядка (см. [33], а также [1], раздел 5.4.2):

$$\frac{d\tilde{E}_{\rm pert}}{dt} = -\epsilon^2\int d^3\mathbf{r}d^3\mathbf{v}f_1(\mathbf{r},\mathbf{v},t)\mathbf{v}\cdot\nabla\Phi_{\rm ext}. \tag{42}$$

Именно поэтому величину $\tilde{E}_{\rm pert}$ принято ассоциировать с полной энергией возмущения, причем, $\epsilon^2\tilde{T}_2$ с кинетической, а $\epsilon^2\tilde{W}_2$ с потенциальной ее частями[4].

Но мы выше, на примере тестового возмущения, продемонстрировали, что величина $\epsilon^2\tilde{W}_2$ не является настоящей потенциальной энергией. Это означает, что, возможно, и величина $\epsilon^2\tilde{T}_2$ тоже не является настоящей кинетической энергией.

Действительно, корректное выражение для кинетической энергии 2-го порядка, назовем его T_2, имеет вид:

$$T_2 = \epsilon^2\int d^3\mathbf{r}d^3\mathbf{v}f_2(\mathbf{r},\mathbf{v})\frac{v^2}{2}, \tag{43}$$

так что корректное выражение для полной энергии возмущений 2-го порядка, которое обозначим $E_{\rm pert}$ (без знака $\tilde{}$), имеет вид

$$E_{\rm pert} = T_2 + W_2, \tag{44}$$

[3] Подчеркнем, что далее отмечаем знаком “тильда” ($\tilde{}$) билинейные формы, составленные только из величин 1-го порядка, а без знака “тильда” – честные величины 2-го порядка, учитывающие вклад возмущений 2-го порядка.

[4] Недавно Лау и Бинни [13] удалось обобщить выражение для энергии возмущений на случай произвольных неэргодических систем с интегрируемым гамильтонианом, в частности, на случай анизотропных сферических систем $F = F(E, L)$.

или

$$E_{\rm pert} = \epsilon^2 \left\{ \int d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{v} f_2(\mathbf{r},\mathbf{v}) \frac{v^2}{2} + \right. \\ \left. + \left[\tilde{W}_2 + \int d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{v} f_2(\mathbf{r},\mathbf{v}) \Phi_0(\mathbf{r}) \right] \right\}. \tag{45}$$

Обратим внимание, что выражение в квадратных скобках в ф-ле (45) представляет корректное выражение для потенциальной энергии W_2, учитывающее вклад 2-го порядка. Это уравнение можно записать как

$$E_{\rm pert} = \epsilon^2 \left[\int d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{v} f_2(\mathbf{r},\mathbf{v}) E + \tilde{W}_2 \right], \tag{46}$$

где $E = \frac{1}{2}v^2 + \Phi_0(\mathbf{r})$ – энергия звезды, являющаяся интегралом движения невозмущенной системы. Мы видим, что корректное выражение (46) для энергии возмущения, включающее все вклады, отличается от принятой в литературе ф-лы (40) (см., напр., [1]) различными выражениями как для потенциальной, так и для для кинетической энергии: $\tilde{T}_2 \neq T_2$, $\tilde{W}_2 \neq W_2$. Тем не менее оказывается, что производные по времени от их сумм совпадают. Иными словами, хотя $W_2(t) \neq \tilde{W}_2(t)$, а $T_2(t) \neq \tilde{T}_2(t)$, сумма $W_2 + T_2$ равна сумме $\tilde{W}_2 + \tilde{T}_2$ с точностью до аддитивной постоянной. Покажем это.

Имеем во 2-м порядке кинетического уравнения:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \Phi_0}{\partial \mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) f_2 = \\ = \frac{\partial \Phi_2}{\partial \mathbf{r}}\frac{\partial F_0}{\partial \mathbf{v}} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \mathbf{r}}\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}} + \frac{\partial \Phi_{\rm ext}}{\partial \mathbf{r}}\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}}. \tag{47}$$

Здесь мы еще добавили в правую часть внешний потенциал $\Phi_{\rm ext}(\mathbf{r})$, который должен служить источником изменения полной энергии, поскольку создаваемая им гравитационная сила $-\nabla\Phi_{\rm ext}$ совершает работу над звездами системы. Умножим обе части (47) на E и проинтегрируем по фазовому объему, учитывая, что E – интеграл невозмущенного движения. Получим:

$$\frac{d}{dt}\int d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{v} f_2(\mathbf{r},\mathbf{v}) E = \\ = \int d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{v} E \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \mathbf{r}}\frac{\partial F_0}{\partial \mathbf{v}} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \mathbf{r}}\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}} + \frac{\partial \Phi_{\rm ext}}{\partial \mathbf{r}}\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}} \right). \tag{48}$$

Первое слагаемое в правой части (48) обращается в нуль из-за антисимметрии подынтегрального выражения по $\mathbf{v}$, так как $E\partial F_0/\partial\mathbf{v} = E\mathbf{v}F_0'(E)$. Второе слагаемое после цепочки преобразований превращается в $-\frac{d\tilde{W}_2}{dt}$. Действительно, имеем для него (48):

$$\int d^3\mathbf{r}\frac{\partial \Phi_1}{\partial \mathbf{r}}\int d^3\mathbf{v} E \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}} = -\int d^3\mathbf{r}\frac{\partial \Phi_1}{\partial \mathbf{r}}\int d^3\mathbf{v}(\mathbf{v} f_1) = \\ = \int d^3\mathbf{r}\Phi_1(\mathbf{r})\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\int d^3\mathbf{v}(\mathbf{v} f_1) = -\int d^3\mathbf{r}\Phi_1\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = \\ = -\int d^3\mathbf{r}\frac{\partial \Phi_1}{\partial t}\rho_1(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2}\int d^3\mathbf{r}\left[\Phi_1\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial t}\rho_1 \right] = \\ = -\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\int d^3\mathbf{r}(\rho_1\Phi_1) \right] = -\frac{d\tilde{W}_2}{dt}. \tag{49}$$

Третье слагаемое превращается в $-\int d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{v} f_1 \mathbf{v}\nabla\Phi_{\rm ext}$:

$$\int d^3\mathbf{r}\frac{\partial \Phi_{\rm ext}}{\partial \mathbf{r}}\int d^3\mathbf{v} E\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}} = \\ = -\int d^3\mathbf{r}\frac{\partial \Phi_{\rm ext}}{\partial \mathbf{r}}\int d^3\mathbf{v}\mathbf{v} f_1 = -\int d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{v} f_1\mathbf{v}\nabla\Phi_{\rm ext}. \tag{50}$$

В итоге, объединяя (48), (49) и (50), получаем, что скорость изменения энергии системы, связанная с работой внешней силы, есть

$$\frac{dE_{\rm pert}}{dt} \equiv \epsilon^2\frac{d}{dt}\left[\int d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{v} f_2\frac{v^2}{2} + W_2 \right] = \\ = -\epsilon^2\int d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{v} f_1\mathbf{v}\nabla\Phi_{\rm ext}. \tag{51}$$

Сравнивая правые части (42) и (51), находим $dE_{\rm pert}/dt = d\tilde{E}_{\rm pert}/dt$, так что истинная полная энергия возмущений $E_{\rm pert}(t)$ отличается от той билинейной конструкции, которую принято называть энергией возмущения, $\tilde{E}_{\rm pert}(t)$, на постоянную величину. Это означает, что обе эти величины 2-го порядка при отсутствии внешних сил сохраняются в ходе эволюции системы. Поэтому конструкцию $\tilde{E}_{\rm pert}(t)$, выражаемую соотношениями (40) и (41), по аналогии с линейной теорией сдвиговых течений жидкости уместно назвать псевдоэнергией. Напомним, что в теории сдвиговых течений тоже существует понятие интеграла псевдоэнергии, который строится как билинейная форма возмущений 1-го порядка. Псевдоэнергия отличается от истинной энергии, которая должна вычисляться с учетом возмущений 2-го порядка (см. [22, 34]).

Заметим, что псевдоэнергия и истинная энергия 2-го порядка могут отличаться знаком. Так, можно показать, что псевдоэнергия собственных мод систем с убывающей эргодической ФР, $F_0'(E) < 0$ (т.е. мод ван Кампена [12]), положительна, хотя истинная энергия может быть любого знака. Это обстоятельство может оказаться важным с точки зрения попыток построения термодинамики звездных скоплений, основанной на привлечении волн ван Кампена [12]. Для успешности таких попыток положительность знака энергии является критической. Однако, например, для нашего тестового возмущения истинная энергия отрицательна. Это следует из соотношения вириала, $2T + W = 0$, которое должно выполняться в всех порядках теории возмущений в силу стационарности возмущения. В частности, во 2-м порядке имеем $2T_2 + W_2 = 0$. Поэтому $E_{\text{pert}} = \epsilon^2(T_2 + W_2) = \frac{1}{2}\epsilon^2 W_2$. Но, как следует из (38), $W_2 < 0$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы показали, что для тестирования кодов при численном исследовании динамики малых возмущений в сферических звездных системах существует контрольное радиальное стационарное возмущение, для которого в явном виде можно получить выражения для функции распределения, плотности и гравитационного потенциала. Это возмущение релевантно для эргодических систем, в моделях которых присутствует единственный масштабный фактор размерности длины. Приведены примеры нескольких известных в литературе моделей такого типа. При решении задачи на собственные значения (любым из известных матричных методов) это возмущение должно дать собственную частоту $\omega = 0$ и соответствующие известные собственные функции, а при решении начальной задачи для возмущения ФР $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t)$ должно подтвердить выполнение сохранения ФР в каждой точке фазового пространства $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t) = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}; 0)$, если в качестве начального принято тестовое возмущение.

Кроме того, в работе проанализировано понятие энергии возмущения, которое фигурирует в линейной теории возмущений бесстолкновительных звездных систем. Известно, что хотя истинная энергия возмущений, будучи величиной 2-го порядка по амплитуде возмущения, в принципе не может быть вычислена в рамках линейной теории, можно построить билинейную форму из величин первого порядка, которая является интегралом линеаризованных уравнений. По форме эта величина очень похожа на энергию и представляет сумму из двух вкладов, которые обычно называют “кинетической” и “потенциальной” энергиями возмущения. На примере тестового возмущения, для которого мы имеем возможность получить выражения в любом порядке теории возмущений, мы убедились, что выражения для “кинетической” и “потенциальной” энергий, полученные в рамках линейной теории, не совпадают с корректными выражениями для кинетической и потенциальной энергий, получаемыми с учетом возмущений 2-го порядка. В работе показано, что интеграл движения, представляемый корректным выражением для энергии возмущения, и интеграл, соответствующий “энергии”, построенной в рамках линейной теории (псевдоэнергии), хотя и не совпадают, но различаются лишь на не зависящую от времени величину (константу). Однако эти величины могут отличаться знаком, что может оказаться важным для задач, связанных с приложением мод ван Кампена к звездным системам.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда развития теоретической физики и математики “БАЗИС” (грант № 20-1-2-33), Программы Президиума РАН № 28 “Космос: исследования фундаментальных процессов и их взаимосвязей” (подпрограмма II “Астрофизические объекты как космические лаборатории”), а также Министерства науки и высшего образования РФ (И.Ш.).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *J. Binney and S. Tremaine*, Galactic Dynamics: 2nd ed. (Princeton Univ. Press, NJ, 2008), BT.
2. *А. Б. Михайловский, А. М. Фридман, Я. Г. Эпельбаум*, ЖЭТФ **59**, 1608 (1970).
3. *В. Л. Поляченко, И. Г. Шухман*, Астрон. журн. **50**, 97 (1973).
4. *В. Л. Поляченко, И. Г. Шухман*, Астрон. журн. **50**, 721 (1973).
5. *А. Г. Морозов, В. Л. Поляченко, И. Г. Шухман*, Астрон. журн. **51**, 75 (1974).
6. *J. Kalnajs*, Astrophys. J. **205**, 751 (1976).
7. *В. Л. Поляченко, И. Г. Шухман*, Астрон. журн. **58**, 933, (1981).
8. *E. V. Polyachenko*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **348**, 345 (2004).
9. *E. V. Polyachenko*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **357**, 559 (2005).
10. *C. Hamilton and T. Heinemann*, arXiv:2011.14812 [astro-ph.GA] (2020).
11. *C. Hamilton*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **501**, 3371 (2021).
12. *J. Y. Lau and J. Binney*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **507**, 2241 (2021).
13. *J. Y. Lau and J. Binney*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **507**, 2562 (2021).
14. *A. M. Fridman and V. L. Polyachenko*, *Physics of Gravitating Systems* (Berlin: Springer-Verlag, 1984).
15. *P. L. Palmer*, *Stability of Collisionless Stellar Systems: Mechanisms for the Dynamical Structure of Galaxies* (Dordrecht, Boston: Kluwer Academic Publishers, 1994).
16. *M. D. Weinberg*, Astrophys. J. **421**, 481 (1994).
17. *D. C. Heggie, P. G. Breen, and A. L. Varri*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **492**, 6019 (2020).
18. *S. D. Mathur*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **243**, 529 (1990).

19. *N. G. van Kampen*, Physica **21**(6), 949 (1955).
20. *Л. Д. Ландау*, ЖЭТФ **16**, 574 (1946).
21. *E. V. Polyachenko, I. G. Shukhman, and O. I. Borodina*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **503**, 660 (2021).
22. *E. V. Polyachenko and I. G. Shukhman*, Phys. Fluids **34**(6), id. 064108 (2022).
23. *Ц. Ц. Линь*, *Теория гидродинамической устойчивости* (М.: ИЛ, 1958).
24. *J. Barré, A. Olivetti, and Y. Y. Yamaguchi*, J. Physics A: Mathematical and Theoretical **44**(41), id. 405502 (2011).
25. *R. King*, Astron. J. **71**, 64 (1966).
26. *S. Tremaine*, Astrophys. J. **625**, 143 (2005).
27. *E. V. Polyachenko, V. L. Polyachenko, and I. G. Shukhman*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **386**, 1966 (2008).
28. *E. V. Polyachenko and I. G. Shukhman*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **451**, 5120 (2015).
29. *M. Hénon*, Ann. d'Astrophysique **23**, 474 (1960).
30. *L. Hernquist*, Astrophys. J. **356**, 359 (1990).
31. *W. Jaffe*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **202**, 995 (1983).
32. *H. C. Plummer*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **71**, 460 (1911).
33. *R. W. Nelson and S. Tremaine*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **306**, 1 (1999).
34. *M. Held,* J. Atmospher. Sci. **42**, 2280 (1985).

SCALE-INVARIANT MODE IN COLLISIONLESS SPHERICAL STELLAR SYSTEMS

E. V. Polyachenko[a] and I. G. Shukhman[b]

[a] *Institute of Astronomy of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*
[b] *Institute of Solar-Terrestrial Physics of Siberian Branch of RAS, Irkutsk, Russia*

An analytical solution of the perturbed equations is obtained, which exists in all ergodic models of collisionless spherical stellar systems with a single length parameter. This solution corresponds to variations of this parameter, that is, the stretching/contraction of the sphere keeping the total mass constant. During the process, the system remains in an equilibrium state. The simplicity of the solution makes it possible to explicitly give expressions for the distribution function, potential, and density in all orders of perturbation theory. This, in turn, helps to clarify the concept of perturbation energy, which, being a second-order magnitude in amplitude, cannot be calculated in linear theory. The expression for the 2nd-order perturbation energy does not match the well-known quadratic form for perturbation energy derived from 1st-order perturbations in linear theory. However, both of these energies are integrals of motion and differ only by a constant. The obtained solution can be used to control the correctness of codes and the accuracy of calculations in the numerical study of collisionless stellar models.

Keywords: stellar systems, stellar clusters and associations, stellar dynamics