

УДК 519.7

ИНТЕРВАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ПАРИТЕТА ДЛЯ ОБНАРУЖЕНИЯ ДЕФЕКТОВ В ДИСКРЕТНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ¹

© 2024 г. А. Н. Жирабок^{a, b, *}, В. В. Зуев^b

^aДальневосточный федеральный ун-т, Владивосток, Россия

^bИнститут проблем морских технологий ДВО РАН, Владивосток, Россия

*e-mail: zhirabok@mail.ru

Поступила в редакцию: 24.08.2023 г.

После доработки 22.01.2024 г.

Принята к публикации 13.05.2024 г.

Рассматривается задача построения так называемых интервальных соотношений паритета для решения задачи обнаружения дефектов в стационарных дискретных системах, описываемых линейными и нелинейными динамическими моделями, при наличии внешних возмущений. Решение основывается на модели исходной системы, имеющей минимальную размерность, оценивающую некоторую линейную функцию вектора выхода системы и нечувствительную или минимально чувствительную к возмущениям. Полученные результаты позволяют строить соотношения паритета, на базе которых решается задача обнаружения дефектов. Теоретические результаты иллюстрируются примером.

Ключевые слова: динамические системы, возмущения, интервальные соотношения паритета, диагностирование

DOI: 10.31857/S0002338824050078, EDN: TDZHIL

INTERVAL PARITY RELATIONS FOR FAULT DIAGNOSIS IN DISCRETE-TIME STATIONARY DYNAMIC SYSTEMS²

A. Zhirabok^{a, b, *}, A. Zuev^b

^aFar Eastern Federal University, Vladivostok, Russia

^bInstitute of Marine Technology Problems, Vladivostok, Russia

*e-mail: zhirabok@mail.ru

The problem of interval parity relations design to solve the problem of fault detection in stationary systems described by linear and nonlinear dynamic models under external disturbances is studied. It is assumed that a solution is based on the model of minimal dimension estimating some linear function of the system state vector and insensitive or having minimal sensitivity to the disturbances. The results obtained allow designing interval parity relations which are basis to solve the problem of fault diagnosis. Theoretical results are illustrated by example.

Keywords: dynamic systems, external disturbances, interval parity relations, fault detection, models

Введение. Задача интервального оценивания вектора состояния динамической системы имеет важное теоретическое и прикладное значение. Для ее решения активно используются интервальные наблюдатели, методы построения которых разрабатываются последние годы. обстоятельные обзоры полученных за это время результатов содержатся в [1, 2], решения для различных классов систем — непрерывных, дискретных, гибридных, с запаздыванием, а также практические приложения можно найти в [3–8]. В работах [9, 10] интервальные наблюдатели применяются для решения задачи обнаружения дефектов.

¹ Работа поддержана Российским научным фондом (проект 23-29-00191), <https://rscf.ru/project/23-29-00191/>.

² Работа поддержана Российским научным фондом (проект 23-29-00191), <https://rscf.ru/project/23-29-00191/>.

Во многих указанных работах такие наблюдатели строятся на основе исходной системы, с их помощью определяется оценка множества допустимых значений всего вектора состояния, в то время как теоретический и практический интерес может представлять соответствующая оценка только для заданной линейной функции этого вектора.

Известен ряд работ, в которых задача оценивания заданной линейной функции вектора состояния решается на базе так называемых функциональных наблюдателей [11–13], которые также используются при построении средств функционального диагностирования линейных и нелинейных динамических систем [14, 15]. Напомним, что под функциональным диагностированием понимается процесс проверки правильности функционирования системы на рабочих входных воздействиях, включающий в себя обнаружение дефекта, локализацию (указание места его появления) и оценивание его величины. Традиционный диагностический наблюдатель [16, 17] формирует так называемую невязку, представляющую собой определенным образом рассчитанное рассогласование между поведением исходной системы и наблюдателя; по характеру невязки принимается решение об отсутствии или наличии в системе дефекта и, если необходимо, месте его появления и величине.

В отличие от диагностического наблюдателя, его интервальный аналог формирует две невязки так, что при отсутствии дефектов одна из них является неположительной, вторая – неотрицательной, т.е. попадание числа нуль между этими невязками говорит о том, что дефекты в системе, на обнаружение которых рассчитан наблюдатель, отсутствуют. Случай, когда нуль находится за пределами этих невязок, квалифицируется как появление дефекта.

Кроме диагностических наблюдателей при синтезе средств функционального диагностирования стационарных дискретных систем, описываемых линейными и нелинейными динамическими моделями, применяются также так называемые соотношения паритета (*parity relations*) [16, 17]. Главное отличие соотношений паритета от диагностических наблюдателей состоит в том, что последние имеют обратную связь, обеспечивающую устойчивость наблюдателей. Известно, что в нелинейном случае обеспечение устойчивости может быть весьма сложной задачей. Напротив, соотношения паритета представляют собой конструкцию без обратных связей, в основе их построения лежит описание системы на языке вход-выход. При отсутствии дефектов соотношения паритета выступают равенством, в котором преобразованное значение вектора выхода системы в момент времени t определяется значениями компонент векторов выхода и входа (управления) системы в моменты $t-1, t-2, \dots, t-t_0$ для некоторого конечного t_0 ; при появлении дефектов это равенство нарушается. Как и диагностические наблюдатели, соотношения паритета формируют невязку для принятия решения об отсутствии или наличии в системе дефектов.

Когда исходная система линейна, задача обнаружения дефектов на основе интервальных наблюдателей решается достаточно просто, наличие нелинейностей усложняет решение, при этом на класс нелинейностей приходится накладывать определенные ограничения. Использование для этих целей соотношений паритета позволяет за счет введения некоторых ограничений на класс дефектов, рассматриваемых в разд. 4, решить задачу обнаружения дефектов для произвольных нелинейностей. Отметим, что в отличие от линейного случая нелинейные наблюдатели не эквивалентны соотношениям паритета.

В цитированных выше работах [14, 15] для целей обнаружения дефектов строятся интервальные диагностические наблюдатели. Поскольку соотношения паритета в нелинейном случае имеют перед ними определенные преимущества, в работе ставится и решается задача построения интервальных соотношений паритета для решения одной из задач функционального диагностирования – обнаружения дефектов – в стационарных дискретных системах, описываемых линейными и нелинейными динамическими моделями, при наличии внешних возмущений.

1. Основные модели и соотношения. Рассмотрим систему, представленную дискретной нелинейной моделью:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) + C\Psi(x(t), u(t)) + Lp(t) + Dd(t), \quad x(0) = x_0, \\ y(t) &= Hx(t), \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $t=0, 1, 2, \dots$ – дискретное время, $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$ и $y(t) \in R^l$ – векторы состояния, управления и выхода; F, G, H, L, C и D – матрицы размеров $n \times n$, $n \times m$ и $l \times n$, $n \times q$, $n \times p$ и $n \times s$

соответственно. Здесь s – размерность вектора $d(t)$; $\rho(t) \in R^q$ – неизвестная ограниченная функция времени, описывающая действующие на систему возмущения, $\underline{\rho} \leq \rho(t) \leq \bar{\rho}$ при всех $t \geq 0$. Нелинейный член $\Psi(x(t), u(t))$ имеет вид:

$$\Psi(x(t), u(t)) = \begin{pmatrix} \phi_1(A_1 x(t), u(t)) \\ \dots \\ \phi_p(A_p x(t), u(t)) \end{pmatrix},$$

где $A_1, \dots, A_p$ – матрицы-строки; $\phi_1, \dots, \phi_p$ – нелинейные (возможно, недифференцируемые) функции.

Слагаемое $Dd(t)$ отражает дефекты, возможные в системе. Они могут быть вызваны как внешними причинами, не связанными с возмущением $\rho(t)$, например повышением температуры окружающей среды, так и изменением значений элементов матриц F , G , H и C в некоторый неизвестный момент времени t_d , например вследствие поломки механических элементов из-за скрытого производственного брака в них. Поскольку появление дефектов выступает следствием недопустимых изменений значений этих факторов, будем полагать, что вариации функции $d(t) \in R^s$ в пределах $\underline{d} \leq d(t) \leq \bar{d}$ при всех $t \geq 0$ для известных $\underline{d}$ и $\bar{d}$ являются допустимыми и не рассматриваются как дефект. Выход за пределы интервала $[\underline{d}, \bar{d}]$ квалифицируется как появление дефекта, который должен быть обнаружен. Как и в работе [1], для векторов $x^{(1)}, x^{(2)}$ отношение $x^{(1)} \leq x^{(2)}$ понимается поэлементно. Так как конкретная причина, вызывающая дефект, остается неизвестной, будем полагать $d(t)$ неизвестной функцией времени.

Как следует из системы (1.1) и ее описания, неопределенность в задаче представлена в виде возмущающего входного сигнала $\rho(t)$ с известными границами $\underline{\rho}$ и $\bar{\rho}$ и вариации функции $d(t)$ с границами $\underline{d}$ и $\bar{d}$.

Рассматриваемая задача вначале решается в линейном случае, когда $C = 0$. Для этого коротко напомним результаты работы [8], где строится редуцированная (имеющая меньшую размерность) линейная модель системы (1.1), оценивающая переменную y_* , задаваемую равенством $y_*(t) = R_* y(t)$ для матрицы R_* , подлежащей определению в ходе решения задачи. Такая модель в общем случае описывается уравнениями:

$$\begin{aligned} x_*(t+1) &= F_* x_*(t) + J_* y(t) + G_* u(t) + L_* \rho(t) + D_* d(t), \quad x_*(0) = x_{*0}, \\ y_*(t) &= H_* x_*(t), \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $x_* \in R^k$ – вектор состояния модели, k – размерность модели, F_* , J_* , G_* , L_* , D_* и H_* – матрицы, подлежащие определению.

З а м е ч а н и е 1. В отличие от строящихся соотношений паритета, модель (1.2) – это виртуальный объект, фактически она представляет собой некоторую часть системы (1.1), описываемую отдельными уравнениями; сама по себе эта часть может быть неустойчивой. В работе [1] модель является основой для построения интервального наблюдателя, в настоящей работе – для построения соотношений паритета.

Для решения задачи предполагается, что существует матрица Φ , такая, что

$$x_*(t) = \Phi x(t)$$

для всех $t \geq 0$. Известно [8], что матрицы, описывающие модель, удовлетворяет уравнениям

$$R_* H = H_* \Phi, \quad \Phi F = F_* \Phi + J_* H, \quad G_* = \Phi G, \quad L_* = \Phi L, \quad D_* = \Phi D. \quad (1.3)$$

Для обоснования соотношений (1.3) запишем равенство $x_*(t) = \Phi x(t)$ для момента времени $t+1$: $x_*(t+1) = \Phi x(t+1)$ и заменим $x(t+1)$ и $x_*(t+1)$ правыми частями уравнений (1.1) и (1.2) соответственно:

$$\Phi F x(t) + \Phi G u(t) + \Phi D d(t) + \Phi L \rho(t) = F_* x_*(t) + J_* H x(t) + G_* u(t) + D_* d(t) + L_* \rho(t).$$

Произведем преобразования, принимая во внимание равенство $x_*(t) = \Phi x(t)$:

$$(\Phi F - F_*\Phi - J_*H)x(t) + (\Phi G - G_*)u(t) + (\Phi L - L_*)\rho(t) + (\Phi D - D_*)d(t) = 0.$$

Нетрудно видеть, что из соотношений (1.3) следует последнее равенство. Для обоснования первого равенства в (1.3) заменим в выражении $y_*(t) = R_*y(t)$ переменную $y_*(t)$ на $H_*x_*(t) = H_*\Phi x(t)$ и $y(t)$ на $y(t) = Hx(t)$: $H_*\Phi x(t) = R_*Hx(t)$, что справедливо, если $R_*H = H_*\Phi$.

Модель (1.2) является основой, на которой далее строятся интервальные соотношения паритета. Как будет ясно из вида этих соотношений, чем уже получаемый интервал, тем меньше число ошибочных решений при диагностировании. Из общих соображений понятно, что неопределенность, вызванная возмущением, будет влиять на ширину интервала, увеличивая его. Поэтому наилучшей с точки зрения диагностирования является модель (1.2), не чувствительная к возмущению $\rho(t)$. Из вида слагаемого $L_*\rho(t)$ в (1.2) следует, что нечувствительность обеспечивается условием $\Phi L = 0$.

2. Построение модели, не чувствительной к возмущению. Система матричных уравнений (1.3) имеет множество решений, для упрощения процедуры поиска зададим матрицы F_* и H_* в идентификационной канонической форме:

$$F_* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad H_* = (1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0). \quad (2.1)$$

Если система (1.2) наблюдаема, то она всегда может быть приведена к виду с такими матрицами [18]. Если она не наблюдаема, то ее можно привести к виду с наблюдаемой подсистемой и матрицы этой подсистемы искать в виде (2.1) [18]. Отметим, что для обеспечения устойчивости модели собственные числа матрицы F_* по модулю не должны превосходить единицу; для матрицы F_* в (2.1) они равны нулю.

Два первых соотношения в (1.3) с учетом (2.1) можно записать как

$$\Phi_1 = R_*H, \quad \Phi_i F = \Phi_{i+1} + J_{*i}H, \quad i = \overline{1, k-1}, \quad \Phi_k F = J_{*k}H, \quad (2.2)$$

где Φ_i и J_{*i} — i -я строка матриц Φ и J_* . Умножением справа на матрицу F и подстановками одно в другое соотношения (2.2) можно свести в одно уравнение:

$$R_*HF^k + J_{*1}HF^{k-1} + \dots + J_{*k}H = 0,$$

которое представим в виде:

$$(R_* - J_{*1} \dots - J_{*k})V^{(k)} = 0, \quad (2.3)$$

где

$$V^{(k)} = \begin{pmatrix} HF^k \\ HF^{k-1} \\ \vdots \\ H \end{pmatrix}.$$

Условие нечувствительности к возмущениям $L_* = \Phi L = 0$ запишем покомпонентно:

$$\Phi_1 L = R_*HL = 0, \quad \Phi_2 L = (R_*HF - J_{*1}H)L = 0, \quad \Phi_k L = (R_*HF^{k-1} - J_{*1}HF^{k-2} - \dots - J_{*k-1}H)L = 0.$$

Нетрудно видеть, что эти уравнения также можно свернуть в одно:

$$(R_* - J_{*1} \dots - J_{*k})L^{(k)} = 0,$$

где

$$L^{(k)} = \begin{pmatrix} HL & HFL & \dots & HF^{k-1}L \\ 0 & HL & \dots & HF^{k-2}L \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Объединяя последнее уравнение с (2.3), получаем в итоге

$$(R_* \quad -J_{*1} \quad \dots \quad -J_{*k})(V^{(k)} \quad L^{(k)}) = 0. \quad (2.4)$$

Уравнение (2.4) имеет нетривиальное решение, если

$$\text{rank}(V^{(k)} \quad L^{(k)}) < l(k+1). \quad (2.5)$$

Для построения модели из (2.5), начиная с $k=1$, определяется минимальное k и из (2.4) — строка $(R_* \quad -J_{*1} \quad \dots \quad -J_{*k})$, затем на основе соотношений (2.2) строится матрица Φ ; G_* определяется из (1.3). Таким образом, линейная модель (1.2) с $L_*=0$ построена; предполагается, что $D_* \neq 0$.

3. Построение линейных соотношений паритета. С учетом вида (2.1) матрицы F_* представим модель (1.2) покомпонентно:

$$\begin{aligned} x_{*1}(t+1) &= x_{*2}(t) + J_{*1}y(t) + G_{*1}u(t) + D_{*1}d(t), \\ x_{*2}(t+1) &= x_{*3}(t) + J_{*2}y(t) + G_{*2}u(t) + D_{*2}d(t), \\ &\dots \\ x_{*k}(t+1) &= J_{*k}y(t) + G_{*k}u(t) + D_{*k}d(t), \\ y_*(t) &= x_{*1}(t) = R_*y(t), \end{aligned}$$

$$x_*(0) = x_{*0}.$$

Произведем k временных сдвигов выходного сигнала модели, выполняя соответствующие подстановки одних уравнений в другие:

$$\begin{aligned} y_*(t+1) &= x_{*1}(t+1) = x_{*2}(t) + J_{*1}y(t) + G_{*1}u(t) + D_{*1}d(t), \\ y_*(t+2) &= x_{*2}(t+1) + J_{*1}y(t+1) + G_{*1}u(t+1) + D_{*1}d(t+1) = \\ &= x_{*3}(t) + J_{*2}y(t) + G_{*2}u(t) + J_{*1}y(t+1) + G_{*1}u(t+1) + D_{*1}d(t+1), \\ &\dots \\ y_*(t+k) &= J_{*1}y(t+k-1) + G_{*1}u(t+k-1) + D_{*1}d(t+k-1) + \\ &+ J_{*2}y(t+k-2) + G_{*2}u(t+k-2) + D_{*2}d(t+k-2) + \dots + \\ &+ J_{*k}y(t) + G_{*k}u(t) + D_{*k}d(t). \end{aligned}$$

Выполняя временной сдвиг на $-k$, приведем последнее выражение к виду

$$y_*(t) = R_*y(t) = \sum_{i=1}^k (J_{*i}y(t-i) + G_{*i}u(t-i) + D_{*i}d(t-i)), \quad (3.1)$$

представляющему собой вход-выходное описание модели.

Искомые интервальные соотношения паритета строятся на основе этого выражения и описываются уравнениями:

$$\begin{aligned}
\underline{y}_*(t) &= \sum_{i=1}^k (J_{*i}y(t-i) + G_{*i}u(t-i) + D_{*i}^+ \underline{d} - D_{*i}^- \bar{d}), \\
\bar{y}_*(t) &= \sum_{i=1}^k (J_{*i}y(t-i) + G_{*i}u(t-i) + D_{*i}^+ \bar{d} - D_{*i}^- \underline{d}), \\
\underline{r}(t) &= y_*(t) - \bar{y}_*(t) = R_* y(t) - \bar{y}_*(t), \\
\bar{r}(t) &= y_*(t) - \underline{y}_*(t) = R_* y(t) - \underline{y}_*(t),
\end{aligned} \tag{3.2}$$

где $A^+ = \max(0, A)$, $A^- = A^+ - A$ для произвольной матрицы A ; нетрудно видеть, что $A^+ \geq 0$, $A^- \geq 0$.

По сравнению с (3.1), соотношения паритета (3.2) содержат дополнительные члены $D_{*i}^+ \underline{d} - D_{*i}^- \bar{d}$ и $D_{*i}^+ \bar{d} - D_{*i}^- \underline{d}$, формирующие искомый интервал по аналогии с интервальным наблюдателем [14, 15]. Переменные $\underline{r}(t) = R_* y(t) - \bar{y}_*(t)$ и $\bar{r}(t) = R_* y(t) - \underline{y}_*(t)$ называются невязками, поскольку они описывают рассогласование между поведением системы (1.1) (представленным переменной $y_*(t) = R_* y(t)$) и поведением соотношений паритета (представленными переменными $\underline{y}_*(t)$ и $\bar{y}_*(t)$, согласно (3.2)).

Т е о р е м а. В случае отсутствия дефектов при всех $t \geq k$ выполняется включение $0 \in [\underline{r}(t), \bar{r}(t)]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим невязку $\underline{r}(t) = R_* y(t) - \bar{y}_*(t)$:

$$\begin{aligned}
\underline{r}(t) &= \sum_{i=1}^k (J_{*i}y(t-i) + G_{*i}u(t-i) + D_{*i}d(t-i)) - \\
&\quad - \left(\sum_{i=1}^k (J_{*i}y(t-i) + G_{*i}u(t-i) + D_{*i}^+ \bar{d} - D_{*i}^- \underline{d}) \right) = \\
&\quad = \sum_{i=1}^k (D_{*i}d(t-i) - D_{*i}^+ \bar{d} + D_{*i}^- \underline{d}).
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Поскольку $D_{*i} = D_{*i}^+ - D_{*i}^-$, то

$$\begin{aligned}
&D_{*i}d(t-i) - D_{*i}^+ \bar{d} + D_{*i}^- \underline{d} = \\
&= D_{*i}^+ d(t-i) - D_{*i}^- d(t-i) - D_{*i}^+ \bar{d} + D_{*i}^- \underline{d} = \\
&= D_{*i}^+ (d(t-i) - \bar{d}) + D_{*i}^- (\underline{d} - d(t-i)).
\end{aligned}$$

Так как при отсутствии дефектов $\underline{d} \leq d(t) \leq \bar{d}$ при всех $t \geq 0$ и $D_{*i}^+ \geq 0$, $D_{*i}^- \geq 0$, то

$$D_{*i}d(t-i) - D_{*i}^+ \bar{d} + D_{*i}^- \underline{d} \leq 0 \tag{3.4}$$

при всех $i = \overline{1, k}$ и $t \geq k$. Тогда из (3.3) следует $\underline{r}(t) \leq 0$ при $t \geq k$. Аналогично показывается, что $D_{*i}d(t-i) + D_{*i}^+ \bar{d} - D_{*i}^- \underline{d} \geq 0$ и $\bar{r}(t) \geq 0$ при $t \geq k$. Неравенства $\underline{r}(t) \leq 0$ и $\bar{r}(t) \geq 0$ эквивалентны доказываемому утверждению. Теорема доказана.

4. Учет нелинейностей. Метод синтеза модели в нелинейном случае опирается на ранее построенную линейную модель и состоит в том, что для найденной при построении линейной модели матрицы Φ выясняется возможность преобразования аргумента нелинейной составляющей $\Psi(x, u)$, делается это следующим образом [19].

Вычисляется матрица $C_* = \Phi C$ и определяются номера $j_1, j_2, \dots, j_d$ ее ненулевых столбцов. Далее проверяется условие

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \Phi \\ H \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} \Phi \\ H \\ A' \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

где матрица A' строится из строк матрицы A с номерами $j_1, j_2, \dots, j_d$. Если это условие выполняется, преобразование аргумента возможно. После этого строится нелинейная составляющая в виде:

$$\Psi_*(x_*, y, u) = \begin{pmatrix} \Phi_{j_1}(A_{*j_1}z, u) \\ \dots \\ \Phi_{j_d}(A_{*j_d}z, u) \end{pmatrix},$$

где $z = \begin{pmatrix} x_* \\ y \end{pmatrix}$, матрицы-строки $A_{*j_1}, A_{*j_2}, \dots, A_{*j_d}$ определяются из линейных уравнений:

$$A_j = A_{*j} \begin{pmatrix} \Phi \\ H \end{pmatrix}, \quad j = \overline{j_1, j_d},$$

и добавляется к линейной модели (1.2). Если условие (4.1) не выполняется, необходимо найти другое решение уравнения (2.2) при прежней или увеличенной размерности k и повторить описанную процедуру с новой матрицей Φ . В общем случае нелинейная модель описывается уравнением:

$$\begin{aligned} x_*(t+1) &= F_*x_*(t) + J_*y(t) + G_*u(t) + C_*\Psi_*(x_*(t), y(t), u(t)) + L_*p(t) + D_*d(t), \\ y_*(t) &= H_*x_*(t). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Известно, что в линейном случае диагностические наблюдатели и соотношения паритета эквивалентны — имея одно, можно получить другое; наличие нелинейностей существенно усложняет задачу. Общих правил перехода от нелинейной модели к соотношениям паритета не существует, ряд частных случаев, в том числе эвристические подходы, рассмотрены в работах [20, 21]. Изложим один из них при $k=3$, когда модель (4.2) описывается уравнениями:

$$\begin{aligned} x_{*1}^+ &= x_{*2} + \alpha_1(x_{*1}, u), \\ x_{*2}^+ &= x_{*3} + \alpha_2(x_{*1}, x_{*2}, u), \\ x_{*3}^+ &= \alpha_3(x_{*1}, x_{*2}, x_{*3}, u), \\ y_* &= x_{*1}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — произвольные нелинейные функции, для простоты слагаемые $L_*p(t) + D_*d(t)$ и символ времени t опущены, через x_{*i}^+ обозначено значение переменной x_{*i} в момент $t+1$. Особенность модели (4.3) состоит в том, что правая часть для каждой переменной содержит нелинейную функцию от этой и предыдущих переменных. Она также может содержать переменную $y(t)$, которая для простоты опущена, поскольку не влияет на результат.

Заменим в первом уравнении из (4.3) x_{*1} на y_* и выразим из него переменную x_{*2} :

$$x_{*2} = y_*^+ - \alpha_1(y_*, u), \quad (4.4)$$

выполним в этом же уравнении временной сдвиг, заменим в полученном соотношении переменную x_{*2}^+ правой частью ее уравнения в (4.3) и аргумент нелинейной функции α_2 заменим, согласно (4.4):

$$y_*^{++} = x_{*2}^+ + \alpha_1(y_*^+, u^+) = \alpha_1(y_*^+, u^+) + x_{*3} + \alpha_2(y_*, y_*^+ - \alpha_1(y_*, u), u).$$

Выразим из последнего соотношения переменную x_{*3} :

$$x_{*3} = y_*^{++} - \alpha_1(y_*^+, u^+) - \alpha_2(y_*, y_*^+ - \alpha_1(y_*, u), u), \quad (4.5)$$

выполним в нем временной сдвиг, заменим в полученном соотношении переменную x_{*3}^+ правой частью ее уравнения в (4.3) и аргумент нелинейной функции α_3 заменим, согласно (4.5):

$$\begin{aligned}
y_*^{+++} &= \alpha_1(y_*^{++}, u^{++}) + x_{*3}^+ + \alpha_2(y_*^+, y_*^{++} - \alpha_1(y_*^+, u^+), u^+) = \\
&= \alpha_1(y_*^{++}, u^{++}) + \alpha_2(y_*^+, y_*^{++} - \alpha_1(y_*^+, u^+), u^+) + \\
&\quad + \alpha_3(y_*, y_*^+ - \alpha_1(y_*, u), y_*^{++} - \alpha_1(y_*^+, u^+) - \alpha_2(y_*, y_*^+ - \alpha_1(y_*, u), u), u).
\end{aligned} \quad (4.6)$$

Как следует из полученного выражения, оно содержит временные сдвиги переменных y_* и u и не содержит компоненты вектора x_* . Таким образом, оно может быть использовано для построения интервальных соотношений паритета, поскольку $y_* = R_* u$ — известная переменная. В силу громоздкости получаемых выражений они опущены, главное состоит в том, что, как и в линейном случае, эти соотношения отличаются от (4.6) только наличием слагаемых, включающих в себя описание дефектов и возмущений, поэтому финальная часть выражения (3.3) для $r(t)$ не содержит нелинейных членов. Доказанная в разд. 3 теорема справедлива и в этом случае.

Из модели (4.3) и последующих преобразований нетрудно заключить, что если слагаемое вида $D_* d(t)$ входит в первое или второе уравнение, то оно войдет в выражения (4.4) или (4.5) и, как результат, в качестве аргумента — в функцию α_2 или α_3 . Последнее означает, что соотношения паритета построить можно, но для доказательства справедливости теоремы эти функции должны удовлетворять определенным ограничениям, в частности они должны быть монотонными по все аргументам [22] или удовлетворять специальным покомпонентным неравенствам [1].

В общем случае, если модель (4.2) с произвольными нелинейностями теми или иными способами удастся привести к вход-выходному виду, описанный подход можно применить тогда, когда дефекты и возмущения входят в правую часть только последнего уравнения, содержащего нелинейность. Это гарантирует, что во вход-выходном описании модели дефекты и возмущения не будут входить в аргументы нелинейных функций, что дает возможность работать с нелинейностями произвольного вида.

З а м е ч а н и е 2. Все сказанное выше относится к случаю отсутствия шумов измерений или наличия шумов невысокой интенсивности. Для линейных интервальных соотношений паритета точный их учет не представляет трудностей и может быть реализован по аналогии с [8]. При наличии шумов высокой интенсивности возможно только приближенное решение, точный результат требует наложения на нелинейности ограничений, оговоренных выше.

5. Робастное решение. Если условие (2.3) не выполняется при всех $k < n$, необходимо искать робастное решение, минимизирующее вклад возмущения в модель. Этот вклад определяется слагаемым $L_* p(t)$ в (1.2) и оценивается нормой Фробениуса матрицы $(R_* - J_{*1} \dots - J_{*k})L^{(k)}$ [21]. Поскольку условием построения модели является равенство

$$(R_* - J_{*1} \dots - J_{*k})V^{(k)} = 0, \quad (5.1)$$

то норма $\|(R_* - J_{*1} \dots - J_{*k})L^{(k)}\|_F$ минимизируется при условии выполнения этого равенства. Так как требование нечувствительности — равенство $(R_* - J_{*1} \dots - J_{*k})L^{(k)} = 0$ — можно трактовать как условие ортогональности строки $(R_* - J_{*1} \dots - J_{*k})$ столбцам матрицы $L^{(k)}$, то можно сказать, что задача состоит в определении такого решения $(R_* - J_{*1} \dots - J_{*k})$, которое «максимально ортогонально» столбцам матрицы $L^{(k)}$ [23].

Как и в работе [22], из всех линейно независимых решений уравнения (5.1) для некоторой фиксированной размерности k строится матрица:

$$W = \begin{pmatrix} R_*^{(1)} & -J_{*1}^{(1)} & -J_{*2}^{(1)} & \dots & -J_{*k}^{(1)} \\ & & \dots & & \\ R_*^{(N)} & -J_{*1}^{(N)} & -J_{*2}^{(N)} & \dots & -J_{*k}^{(N)} \end{pmatrix},$$

находится сингулярное разложение $WL^{(k)} = U_L S_L V_L$, первый транспонированный столбец матрицы U_L выбирается в качестве вектора весовых коэффициентов $w = (w_1, \dots, w_N)$ и принимает-

ся $(R_* \ -J_{*1} \ \dots \ -J_{*k}) = wW$. Величина нормы $\|(R_* \ -J_{*1} \ \dots \ -J_{*k})L^{(k)}\|_F$ равна минимальному сингулярному числу матрицы $WL^{(k)}$ [23]. Определением матриц $G_* = \Phi G$ и $L_* = \Phi L$ завершается синтез модели (1.2), минимально чувствительной к возмущениям.

Из-за появления слагаемого $L_* \rho(t)$ в модели интервальные соотношения паритета (3.2) принимают вид:

$$\begin{aligned} \underline{y}_*(t) &= \sum_{i=1}^k (J_{*i} y(t-i) + G_{*i} u(t-i) + D_{*i}^+ \underline{d} - D_{*i}^- \bar{d} + L_{*i}^+ \underline{\rho} - L_{*i}^- \bar{\rho}), \\ \bar{y}_*(t) &= \sum_{i=1}^k (J_{*i} y(t-i) + G_{*i} u(t-i) + D_{*i}^+ \bar{d} - D_{*i}^- \underline{d} + L_{*i}^+ \bar{\rho} - L_{*i}^- \underline{\rho}), \\ \underline{r}(t) &= y_*(t) - \bar{y}_*(t), \\ \bar{r}(t) &= y_*(t) - \underline{y}_*(t). \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что искомым результат следует из доказательства теоремы и дополнительных неравенств $L_{*i} \rho(t-i) + L_{*i}^+ \underline{\rho} - L_{*i}^- \bar{\rho} \leq 0$ и $L_{*i} \rho(t-i) + L_{*i}^+ \bar{\rho} - L_{*i}^- \underline{\rho} \geq 0$, первое из которых подобно (3.4).

6. Пример. Рассмотрим дискретизированную модель электропривода:

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= k_1 x_2(t) + x_1(t), \\ x_2(t+1) &= k_2 x_2(t) + k_3 x_3(t) + k_7 \text{sign}(x_2(t)) + d(t) + \rho(t), \\ x_3(t+1) &= k_4 x_2(t) + k_5 x_3(t) + k_6 u(t), \\ y(t) &= x_3(t), \end{aligned} \tag{6.1}$$

$x(0) = x_0$. Здесь $x_1(t)$ — угол поворота выходного вала редуктора; $x_2(t)$ — скорость вращения выходного вала двигателя; $x_3(t)$ — ток цепи якоря; коэффициенты $k_1 - k_7$ зависят от параметров электропривода и интервала дискретизации; возмущение $\rho(t)$ обусловлено наличием внешнего нагрузочного момента, приведенного к валу двигателя; дефект, представленный функцией $d(t)$, вызван изменением коэффициентов сухого и вязкого трения в двигателе, что выражается в изменении значений коэффициентов k_2 , k_3 и k_7 ; если значения этих коэффициентов изменились на Δk_2 , Δk_3 и Δk_7 соответственно, то $\underline{d} \leq d(t) \leq \bar{d}$, $t < t_d$, для известных $\underline{d}$ и $\bar{d}$ и

$$d(t) = \Delta k_2 x_2(t) + \Delta k_3 x_3(t) + \Delta k_7 \text{sign}(x_2(t)), \quad t \geq t_d, \tag{6.2}$$

где t_d — момент времени появления дефекта.

Рассматриваемая модель описывается следующим образом:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & k_1 & 0 \\ 0 & k_2 & k_3 \\ 0 & k_4 & k_5 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k_6 \end{pmatrix}, \quad H = (0 \ 0 \ 1), \quad L = D = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ k_7 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\Psi(x, u) = \text{sign}(Ax), \quad A = (0 \ 1 \ 0).$$

Поскольку дефект и возмущение входят в уравнения одинаковым образом, модель будет чувствительна к возмущению и в (2.2) следует принять $L^{(k)} = 0$; при $k = 1$ уравнение решения не имеет, при $k = 2$ оно принимает вид:

$$(R_* \ -J_{*1} \ -J_{*2}) \begin{pmatrix} 0 & k_4(k_2 + k_5) & k_3 k_4 + k_5^2 \\ 0 & k_4 & k_5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Его решение дает $R_* = 1$,

$$J_* = \begin{pmatrix} k_2 + k_5 \\ k_3 k_4 - k_2 k_5 \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & k_4 & -k_2 \end{pmatrix}, \quad G_* = \begin{pmatrix} k_6 \\ -k_2 k_6 \end{pmatrix},$$

$L_* = D_* = k_4$, $C_* = k_4 k_7$, $A' = A$. Так как $k_4 < 0$, $L_*^+ = D_*^+ = 0$, $L_*^- = D_*^- = -k_4$. Нетрудно проверить, что условие (1.4) выполняется и $A_* = (0 \ 1 / k_4 \ k_2 / k_4)$. Искомая модель имеет вид:

$$\begin{aligned} x_{*1}(t+1) &= x_{*2}(t) + (k_2 + k_5)y(t) + k_6 u(t), \\ x_{*2}(t+1) &= (k_3 k_4 - k_2 k_5)y(t) + k_4 k_7 \text{sign}((1/k_4)(x_{*2}(t) + k_2 y(t))) - k_2 k_6 u(t) + k_4 d(t) + k_4 \rho(t), \\ y_*(t) &= x_{*1}(t) = y(t). \end{aligned}$$

На основе этой модели по методу, изложенному в разд. 4, построим соотношения паритета: выразим из первого уравнения переменную x_{*2} :

$$x_{*2}(t) = x_{*1}(t+1) - (k_2 + k_5)y(t) - k_6 u(t). \quad (6.3)$$

Выполним в этом уравнении временной сдвиг, заменим в полученном соотношении переменную $x_{*2}(t+1)$ правой частью ее уравнения и заменим аргумент нелинейной функции sign , согласно (6.3):

$$\begin{aligned} y(t+2) &= x_{*1}(t+2) = x_{*2}(t+1) + (k_2 + k_5)y(t+1) + k_6 u(t+1) = \\ &= (k_2 + k_5)y(t+1) + (k_3 k_4 - k_2 k_5)y(t) + k_6 u(t+1) + k_4 k_7 \text{sign}((1/k_4)(y(t+1) - \\ &\quad - (k_2 + k_5)y(t) - k_6 u(t) + k_2 y(t))) - k_2 k_6 u(t) + k_4 d(t) + k_4 \rho(t). \end{aligned}$$

Выполним временной сдвиг на -2 и произведем преобразования:

$$\begin{aligned} y(t) &= (k_2 + k_5)y(t-1) + (k_3 k_4 - k_2 k_5)y(t-2) + k_6 u(t-1) + \\ &+ k_4 k_7 \text{sign}((1/k_4)(y(t-1) - k_5 y(t-2) - k_6 u(t-2))) - k_2 k_6 u(t-2) + k_4 d(t-2) + k_4 \rho(t-2). \end{aligned}$$

Интервальные соотношения паритета строятся на основе последнего выражения и имеют вид:

$$\begin{aligned} \underline{y}(t) &= (k_2 + k_5)y(t-1) + (k_3 k_4 - k_2 k_5)y(t-2) + k_6 u(t-1) + \\ &+ k_4 k_7 \text{sign}((1/k_4)(y(t-1) - k_5 y(t-2) - k_6 u(t-2))) - k_2 k_6 u(t-2) + k_4 \underline{d} + k_4 \underline{\rho}, \\ \bar{y}(t) &= (k_2 + k_5)y(t-1) + (k_3 k_4 - k_2 k_5)y(t-2) + k_6 u(t-1) + \\ &+ k_4 k_7 \text{sign}((1/k_4)(y(t-1) - k_5 y(t-2) - k_6 u(t-2))) - k_2 k_6 u(t-2) + k_4 \bar{d} + k_4 \bar{\rho}, \\ \underline{r}(t) &= y(t) - \bar{y}(t), \quad \bar{r}(t) = y(t) - \underline{y}(t). \end{aligned} \quad (6.4)$$

Для моделирования рассмотрим систему (6.1) и соотношения паритета (6.4) при $u(t) = 2 + \sin(t)$. Возмущение $\rho(t)$ представлено случайной величиной, равномерно распределенной на интервале $[-0.05; 0.05]$, принято $\rho = -0.05$, $\bar{\rho} = 0.05$. Интервал $[\underline{d}, \bar{d}]$ допустимых вариаций функции $d(t)$ задан в виде $[-0.1; 0.1]$; коэффициенты $k_1 + k_7$ приняты следующими: $k_1 = k_3 = k_6 = k_7 = 1$, $k_2 = k_4 = k_5 = -1$. На рис. 1 и 2 представлены результаты моделирования наблюдателя с начальным состоянием $x(0) = x_0 = (0 \ 0 \ 5)^T$, где показано поведение невязок $\underline{r}(t)$ и $\bar{r}(t)$.

Согласно (6.2), $d(t)$ при $t \geq t_d$ зависит от переменных $x_2(t)$ и $x_3(t)$ и $\Delta k_2, \Delta k_3, \Delta k_7$, но значения $x_2(t)$ не измеряются и на практике величины $\Delta k_2, \Delta k_3, \Delta k_7$ также неизвестны, поэтому при моделировании $d(t)$ может быть выбрано произвольным. Для простоты значение $d(t)$ при $t \geq 40$ с принято постоянным.

На рис. 1 $d(t) = 0$, $t < 40$ с, $d(t) = 0.07$, $t \geq 40$ с; поскольку значение $d(t) = 0.07$ остается в пределах допустимого интервала, то $0 \in [\underline{r}(t), \bar{r}(t)]$, что квалифицируется как отсутствие дефектов. На рис. 2 $d(t) = 0$, $t < 40$ с, $d(t) = 0.3$, $t \geq 40$ с. Поскольку теперь $0 \notin [\underline{r}(t), \bar{r}(t)]$, делается заключение о появлении дефекта. Произвольное поведение невязок в первые несколько тактов является характерным для соотношений паритета.

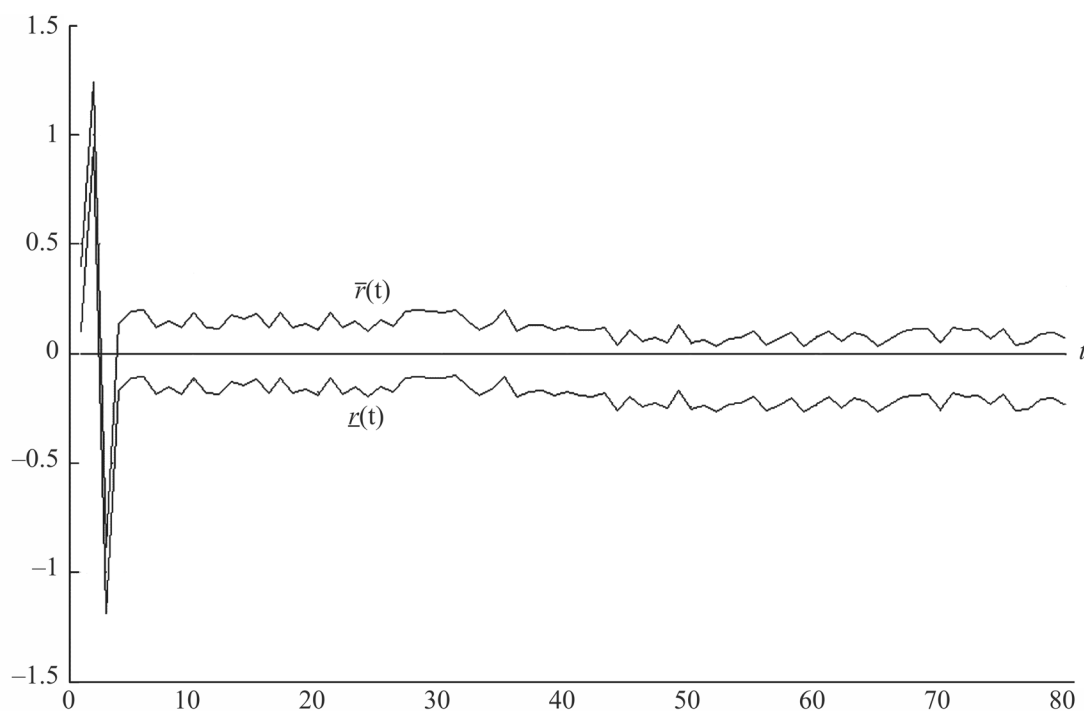


Рис. 1. Поведение невязок $\underline{r}(t)$ и $\bar{r}(t)$ для случая отсутствия дефектов.

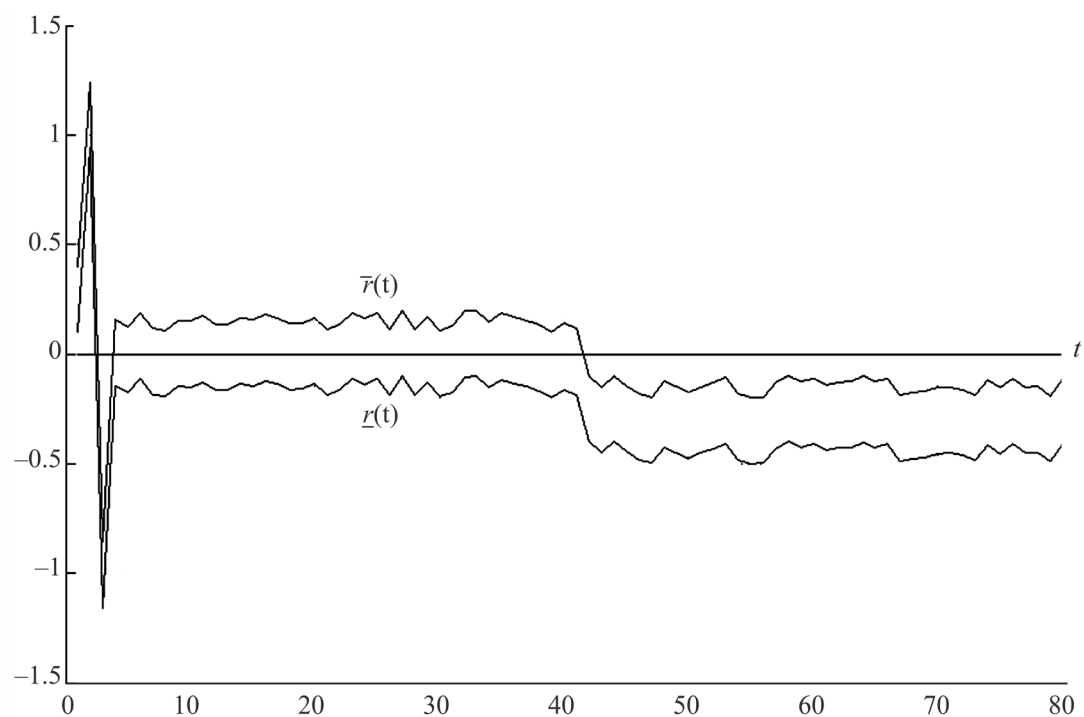


Рис. 2. Поведение невязок $\underline{r}(t)$ и $\bar{r}(t)$ при появлении дефекта.

Заключение. Рассмотрена задача построения интервальных соотношений паритета для стационарных дискретных систем, описываемых линейными и нелинейными динамическими моделями, при наличии внешних возмущений с целью решения одной из задач функционального диагностирования – обнаружения дефектов. Решение основано на линейной модели, не чувствительной или минимально чувствительной к возмущению, на базе идентификационной канонической формы. Показано, как полученная модель может быть использована для учета нелинейных членов системы и построения интервальных соотношений паритета. Приво-

дятся формулы, позволяющие построить соотношения паритета минимальной сложности, не чувствительные или малочувствительные к возмущению, на основе которых решается задача обнаружения дефектов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ефимов Д.В. Построение интервальных наблюдателей для динамических систем с неопределенностями // *АиТ*. 2016. № 2. С. 5–49.
2. Khan A., Xie W., Zhang L., Liu L. Design and Applications of Interval Observers for Uncertain Dynamical Systems // *IET Circuits Devices Syst.* 2020. V. 14. P. 721–740.
3. Кремлев А.С., Чеботарев С.Г. Синтез интервального наблюдателя для линейной системы с переменными параметрами // *Изв. вузов. Приборостроение*. 2013. Т. 56. № 4. С. 42–46.
4. Chebotarev S., Efimov D., Raissi T., Zolghadri A. Interval Observers for Continuous-Time LPV Systems with L_1/L_2 Performance // *Automatica*. 2015. V. 51. P. 82–89.
5. Mazenc F., Bernard O. Asymptotically Stable Interval Observers for Planar Systems with Complex Poles // *IEEE Trans. Automatic Control*. 2010. V. 55. № 2. P. 523–527.
6. Zheng G., Efimov D., Perruquetti W. Interval State Estimation for Uncertain Nonlinear Systems // *IFAC NOLCOS 2013*. Toulouse, France, 2013.
7. Zhang K., Jiang B., Yan X., Edwards C. Interval Sliding Mode Based Fault Accommodation for Non-Minimal Phase LPV Systems with Online Control Application // *Int. J. Control*. 2019. № 2. <https://doi.org/10.1080/00207179.2019.1687932>
8. Жирабок А.Н., Зуев А.В., Ким Чхун Ир. Метод построения интервальных наблюдателей для стационарных линейных систем // *Изв. РАН. ТиСУ*. 2022. № 5. С. 3–13.
9. Rotondo D., Fernandez-Cantia R., Tornil-Sina S., Blesa J., Puig V. Robust Fault Diagnosis of Proton Exchange Membrane Fuel Cells Using a Takagi-Sugeno Interval Observer Approach // *Int. J. Hydrogen Energy*. №1. 2016.
10. Zhang Z., Yang G. Interval Observer-Based Fault Isolation for Discrete-Time Fuzzy Interconnected Systems With Unknown Interconnections // *IEEE Trans. on Cybernetics*. № 5. 2017. <https://doi.org/10.1109/TCYB.2017.2707462>
11. Kravaris C., Venkateswaran S. Functional Observers with Linear Error Dynamics for Nonlinear Systems // *Systems Control Lett.* 2021. V. 157. P. 105021.
12. Liu L., Xie W., Khan A., Zhang L. Finite-Time Functional Interval Observer for Linear Systems with Uncertainties // *IET Control Theory and Applications*. 2020. V. 14. № 18. P. 2868–2878.
13. Meyer L. Robust Functional Interval Observer for Multivariable Linear Systems // *J. Dynamic Systems, Measurement, and Control*. 2019. V. 141. № 9. Art. no. 094502.
14. Venkateswaran S., Liu Q., Kravaris C. Design of linear Residual Generators for Fault Detection and Isolation in Nonlinear Systems // *Int. J. Control*. 2022. V. 95. P. 804–820.
15. Venkateswaran S., Wilhite B., Kravaris C. Functional Observers with Linear Error Dynamics for Discrete-Time Nonlinear Systems, with Application to Fault Diagnosis // Preprint 2021. <https://www.researchgate.net/publication/352177782>
16. Blanke M., Kinnaert M., Lunze J., Staroswiecki M. Diagnosis and Fault Tolerant Control. Berlin: Springer-Verlag, 2016.
17. Жирабок А.Н. Диагностические наблюдатели и соотношения паритета: сравнительный анализ // *АиТ*. 2012. № 5. С. 141–160.
18. Квасернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977.
19. Жирабок А.Н., Шумский А.Е., Соляник С.П., Суворов А.Ю. Метод построения нелинейных робастных диагностических наблюдателей // *АиТ*. 2017. № 9. С. 34–48.
20. Zhirabok A., Shumsky A., Scherbatyuk A. Nonparametric Methods for Fault Diagnosis in Dynamic Systems // *Int. J. Robust and Nonlinear Control*. 2018. V. 28. № 17. P. 5424–5436.
21. Жирабок А.Н., Шумский А.Е. Непараметрический метод диагностирования нелинейных динамических систем // *АиТ*. 2019. № 2. С. 24–45.
22. Жирабок А.Н., Зуев А.В., Шумский А.Е., Бобко Е.Ю. Построение интервальных наблюдателей для дискретных нелинейных динамических систем // *Мехатроника, автоматизация, управление*. 2023. Т. 24. № 6. С. 283–291.
23. Low X., Willsky A., Verghese G. Optimally Robust Redundancy Relations for Failure Detection in Uncertain Systems // *Automatica*. 1996. V. 22. P. 333–344.