

УДК 519.853, 517.977.5

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ПРОГРАММ ПРЕДПРИЯТИЯ С УЧЕТОМ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ¹

© 2024 г. И. А. Борисов^{a, *}, О. А. Косоруков^{b, **},
А. В. Мищенко^{a, ***}, В. И. Цурков^{c, ****}

^aФГБОУ ВО "Финансовый университет при Правительстве
Российской Федерации", Москва, Россия

^bМГУ им. М. В. Ломоносова, Российская академия народного хозяйства
и государственной службы при Президенте РФ, Российский экономический
университет имени Г. В. Плеханова, Москва, Россия,

^cФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

*e-mail: ilyaborisov2015@yandex.ru

**e-mail: kosorukova@mail.ru

***e-mail: alnex4957@rambler.ru

****e-mail: v.tsurkov@mail.ru

Поступила в редакцию 12.04.2024 г.

После доработки 21.05.2024 г.

Принята к публикации 15.07.2024 г.

Рассмотрен метод ветвей и границ, используемый для выбора оптимальной производственной программы, который основан на вычислении верхней, нижней и текущих верхних оценок при анализе различных вариантов производственных программ. Дана верхняя оценка количества допустимых решений приведенной задачи. Описаны модели выбора оптимальной производственной программы в условиях расширения производства, а также вопросы анализа устойчивости этих программ при изменении исходных данных модели и критерия оптимальности модели. Применение моделей выбора оптимальной производственной программы в рамках проектного управления на предприятиях обеспечит повышение эффективности мероприятий, в том числе на этапах планирования и реализации проектов, классификации и выбора метода реализации проектов.

Ключевые слова: производственная программа, метод ветвей и границ, анализ устойчивости, расширение производства.

DOI: 10.31857/S0002338824040052 EDN: UEGQUQ

OPTIMIZATION OF ENTERPRISE PRODUCTION PROGRAMS TAKEN INTO ACCOUNT OF UNCERTAINTY

I. A. Borisov^{a, *}, O. A. Kosorukov^{b, **},
A. V. Mishchenko^{a, ***}, V. I. Tsurkov^{c, ****}

^aFGOBU VO "Financial University under the Government
of the Russian Federation", Moscow, Russia

^bMoscow State University named after M. V. Lomonosov, Russian Academy of National Economy
and Public Administration under the President of the Russian Federation,
Russian Economic University named after G. V. Plekhanov, Moscow, Russia,

^cFederal Research Center "Computer Science and Control,"
Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

*e-mail: ilyaborisov2015@yandex.ru

**e-mail: kosorukova@mail.ru

¹ Результаты исследований, представленные в разд. 6, 7, получены за счет средств Российского научного фонда (проект № 24-21-00339).

***e-mail: alnex4957@rambler.ru

***e-mail: v.tsurkov@mail.ru

The branch and bound method used to select the optimal production program is considered, based on the calculation of the upper, lower and current upper estimates when analyzing various options for production programs. An upper bound for the number of feasible solutions to the problem under consideration is given. Models for choosing an optimal production program in conditions of production expansion are considered, as well as issues of analyzing the stability of these programs when changing the initial data of the model and when changing the criterion for the optimality of the model. The use of models for selecting the optimal production program within the framework of project management at enterprises will ensure increased efficiency of activities, including at the stages of planning and implementation of projects, classification and selection of a method for implementing projects.

Keywords: production program, branch and bound method, production expansion, stability of the programs.

Введение. Одной из задач производственного планирования является выбор оптимальной производственной программы предприятия. В условиях динамически изменяющейся внешней среды такой выбор — непростая задача, требующая для решения использования математико-статистических методов и моделей [1, 2].

Статические методы и модели выбора таких программ, в том числе методы оценки риска доходности этих программ и риска упущенной выгоды, рассмотрены в [3,4]. Динамические модели выбора оптимальной производственной программы, методы оптимизации загрузки оборудования при выпуске продукции, заданной производственной программой, оценки устойчивости расписаний при изменении параметров задачи представлены в [5–7]. Динамические и статические модели и методы управления ограниченными ресурсами на транспорте излагаются в [8–10]. В [11–13] приведены точные и приближенные алгоритмы построения оптимальных расписаний для планирования работы многопроцессорной вычислительной техники. Модели и методы управления ограниченными ресурсами, которые сводятся к решению минимаксных задач, описаны в [14–20].

В настоящей статье для выбора оптимальной производственной программы предприятия предлагается использование метода ветвей и границ, основанного на вычислении верхней, нижней и текущих верхних оценок при анализе различных вариантов производственных программ, дана верхняя оценка количества допустимых решений рассматриваемой задачи. Также представлены модели выбора оптимальной производственной программы в условиях расширения производства, вопросы анализа устойчивости этих программ при изменении исходных данных модели и при изменении критерия оптимальности модели.

Предложенные методы и модели могут использоваться в том числе в рамках проектного управления на предприятиях, обеспечивая возможность выбора оптимального метода управления проектом, эффективное выполнение мероприятий на этапах планирования и реализации проектов [21, 22].

1. Постановка задачи и метод решения. Рассмотрим следующую модель выбора оптимальной производственной программы:

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i - \sum_{i=1}^n b_i x_i - Z_{\text{пост}} \rightarrow \max, \quad (1.1)$$

$$\sum_{i=1}^n l_{ij} x_i \leq L_j, \quad j = \overline{1, M}, \quad (1.2)$$

$$\sum_{i=1}^n t_{il} x_i \leq K_l \tau_l, \quad l = \overline{1, K}, \quad (1.3)$$

$$x_i \leq P t_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (1.4)$$

$$x_i \in Z^+, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1.5)$$

Здесь использовались следующие обозначения: a_i — цена продукции i -го вида; b_i — переменные издержки на единицу продукции i -го вида; x_i — объем выпуска продукции i -го вида; $Z_{\text{пост}}$ — постоянные издержки; l_{ij} — норма потребления материальных ресурсов j -го вида при выпуске единицы продукции i -го вида; L_j — запасы материальных ресурсов j -го вида; t_{il} — норма времени загрузки оборудования l -го вида при выпуске единицы продукции i -го вида; K_l — число единиц оборудования l -го вида, участвующих в процессе производства; τ_l — эффективное время работы оборудования l -го вида на периоде планирования $(0, T)$; Pt_i — объем спроса на продукцию i -го вида; Z^+ — множество целых неотрицательных чисел.

1.1. Метод ветвей и границ для задачи выбора оптимальной производственной программы. Задача (1.1) — (1.5) является задачей линейной целочисленной оптимизации и для ее решения может быть использован метод ветвей и границ.

Шаг 1. Верхняя оценка задачи (1.1) — (1.5) F_θ может быть получена путем замены ограничения (1.5) на ограничение (1.6) следующего вида:

$$x_i \geq 0, i = \overline{1, n}, \quad (1.6)$$

Значение целевой функции на оптимальном решении задачи (1.1) — (1.4), (1.6) будем считать F_θ .

Шаг 2. Нижняя оценка задачи (1.1) — (1.5) F_H может находиться путем выбора допустимого решения задачи (1.1) — (1.5) и вычисления значения целевой функции (1.1) на этом решении.

Шаг 3. Вычисление верхних текущих оценок. Если $F_\theta = F_H$, то решение задачи (1.1) — (1.5) получено. Если $F_\theta > F_H$, то начинаем формировать очередное допустимое решение с вычислением $F_\theta^{\text{тек}}(\tilde{x})$. Здесь $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_n)$ — вектор, задающий объемы выпуска продукции, которые уже вошли в производственную программу.

Верхняя текущая оценка выполняется по следующей формуле:

$$F_\theta^{\text{тек}}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) = \sum_{i=1}^n a_i \tilde{x}_i - \sum_{i=1}^n b_i \tilde{x}_i - Z_{\text{пост}} + F_\theta(\tilde{L}_j, \tilde{\tau}_l, \tilde{Pt}_i), \quad (1.7)$$

$$\tilde{L}_j = L_j - \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i l_{ij}, j = \overline{1, M},$$

$$K_l \tilde{\tau}_l = K_l \tau_l - \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i t_{il}, l = \overline{1, K},$$

$$\tilde{Pt}_i \leq Pt_i - \tilde{x}_i,$$

где $F_\theta(\tilde{L}_j, K_l \tilde{\tau}_l)$ — верхняя оценка задачи (1.1) — (1.5) с учетом того, что объем материальных ресурсов равен $\tilde{L}_j$, $j = \overline{1, M}$, а эффективное время по каждому виду оборудования равно $K_l \tilde{\tau}_l$, $l = \overline{1, K}$. Здесь $\tilde{L}_j$ — остаток материальных ресурсов j -го вида после выпуска продукции в объеме $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$; $K_l \tilde{\tau}_l$ — остаток эффективного времени для оборудования вида l после выпуска продукции в объеме $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$.

Если $F_\theta^{\text{тек}}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) > F_H$, то формирование производственной программы продолжается путем включения в производственную программу еще одной единицы продукции и дальнейшей вычисленной текущей верхней оценки.

Если $F_\theta^{\text{тек}}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) \leq F_H$, то данная программа не будет оптимальной и исключается из дальнейшего рассмотрения.

Если $F_\theta^{\text{тек}}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) > F_H$ остается до момента, когда ни одну единицу продукции невозможно включить в производственную программу, не нарушив одно из ограничений (1.2) — (1.5), то вычисляется значение целевой функции (1.1) на сформированной производственной программе. Обозначим это значение:

$F^* > F_H$ — значение F_H сдвигается вправо и становится равным F^* ;

$F^* = F_\theta$ — задача (1.1) — (1.5) решена;

$F^* < F_\theta$ — переходим к анализу очередного допустимого решения.

Решение задачи (1.1) — (1.5) будет получено, если:

а) при очередной корректировке F_H ее значение совпадает с F_θ ;

б) все варианты формирования производственных программ исследованы, тогда в качестве оптимального решения выбирается та программа, которая соответствует последнему (максимальному) значению F_H .

1.2. Верхняя оценка числа допустимых производственных программ. Верхняя оценка объема выпуска по каждому виду продукции определяется исходя из ограничений (1.2) – (1.5).

Так, если мы определяем максимальный объем выпуска продукции первого вида, исходя из ограничений на материальные ресурсы, то этот объем $\theta_{\max}^1$ задается следующей формулой:

$$\theta_{\max}^1 = \min_{j=1, M} \left\{ \frac{L_j}{l_{1j}} \right\}.$$

Максимальный объем выпуска продукции первого вида $r_{\max}^1$ при ограничениях на производственные мощности вычисляется как

$$r_{\max}^1 = \min_{l=1, k} \left\{ \frac{k_l \tau_l}{t_{1l}} \right\}.$$

Таким образом, максимальный выпуск продукции первого вида $x_1^{\max}$ рассчитывается следующим образом:

$$x_1^{\max} = \min \left\{ r_{\max}^1, \theta_{\max}^1, p t_1 \right\}.$$

Аналогично определяется максимальный объем выпуска по другим видам продукции:

$$x_i^{\max} = \min_{i=1, n} \left\{ r_{\max}^i, \theta_{\max}^i, p t_i \right\}.$$

Таким образом, количество допустимых производственных программ задачи (1.1) – (1.5) не превысит числа N :

$$N = \prod_{i=1}^n (x_i^{\max} + 1).$$

Наряду с критерием прибыли (целевая функция (1.1)) при выборе производственной программы может использоваться критерий рентабельности следующего вида:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i - \sum_{i=1}^n b_i x_i - Z_{\text{пост}} \right) / \left(\sum_{i=1}^n b_i x_i + Z_{\text{пост}} \right) \rightarrow \max. \quad (1.8)$$

Очевидно, критерий (1.8) есть отношение прибыли к затратам.

Как будет показано ниже, при определенных условиях оптимальные производственные программы по критериям (1.1) и (1.8) совпадают.

2. Устойчивость при нелинейном изменении доходности производственной программы от инфляции.

Пусть в задаче (1.1) – (1.5) маржинальный доход c_i равен:

$$c_i = a_i + b_i.$$

Здесь a_i – цена продукции i -го вида; b_i – переменные издержки при выпуске продукции i -го вида. Будем полагать, что c_i зависит от уровня инфляции ξ следующим образом:

$$c_i(\xi) = c_i + \varphi_i(\xi),$$

$$\frac{d\varphi_i(\xi)}{d\xi} \geq 0,$$

$$\varphi_i(0) = 0,$$

$$\bar{X} = \{x^1, \dots, x^\ell, \dots, x^N\}.$$

Множество $\bar{X}$ задает перечень всех производственных программ. Допустим, что x^ℓ – оптимальное решение при $\xi = 0$, которое обозначили черз

$$f^j(\xi) = \sum_{i=1}^n c_i(\xi) x_i^j, \quad j = \overline{1, N}.$$

Тогда переход на новую оптимальную производственную программу x^k при каком-то значении ξ возможен, если:

а) существует интервал $[\xi_1, \xi_2]$, на котором

$$\frac{df^k(\xi)}{d\xi} > \frac{df^l(\xi)}{d\xi};$$

б) существует $\xi^* \in [\xi_1, \xi_2]$, для которого $f^k(\xi^*) = f^l(\xi^*)$;

в) $\frac{df^k(\xi)}{d\xi} > \frac{df^l(\xi)}{d\xi}$ при $c_i = a_i + b_i$.

Если условие в) не выполняется, то возможна следующая ситуация (рис. 1).

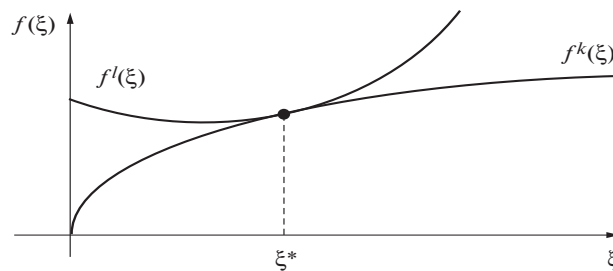


Рис. 1. Отсутствие перехода на новую производственную программу

Не соблюдается условие в) для перехода на новую оптимальную производственную программу. На рис. 1 существует ξ^* , для которого $f^l(\xi^*) = f^k(\xi^*)$, но

$$\frac{df^k(\xi)}{d\xi} \leq \frac{df^l(\xi)}{d\xi},$$

поэтому переход на любую оптимальную производственную программу в точке ξ^* не происходит.

В ситуации нелинейного роста $c_i(\xi)$ возможно несколько переходов от одной оптимальной производственной программы к другой (рис. 2).

3. Анализ устойчивости модели к изменению критерия. Пусть есть множество допустимых значений $\bar{X} = \{x^1, \dots, x^\ell, \dots, x^N\}$ для оптимальных моделей (1.1) – (1.5) и (1.8), (1.2) – (1.5). Очевид-

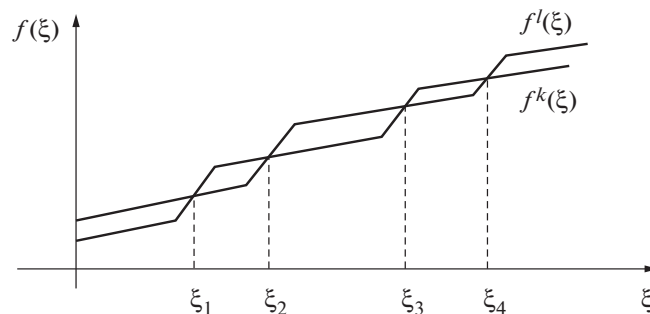


Рис. 2. Несколько переходов от оптимальной производственной программы x^l к оптимальной производственной программе x^k и обратно

но, в силу того, что системы ограничений в моделях (1.1) – (1.5) и (1.8), (1.2) – (1.5) совпадают, множество допустимых решений у этих моделей также будет одно и то же.

Допустим, что x^{ℓ} является оптимальным решением для модели (1.1) – (1.5). Очевидно, что если переменные издержки $b_i = 0$, то x^{ℓ} будет оптимально и для модели (1.8), (1.2) – (1.5), так как в этом случае критерий (1.8) – это целевая функция (1.1), умноженная на константу.

В каком диапазоне можно менять значения показателей b_i , умножая их на $\lambda > 0$ так, чтобы оптимальное решение для критериев (1.1) и (1.8) совпадали, иллюстрирует следующий численный эксперимент.

Пусть существует пекарня, которая выпускает четыре вида продукции (табл. 1).

Постоянные издержки составляют 5000 руб/мес.

Таблица 1. Виды продукции пекарни

Продукт	Цена, руб.	Переменные затраты, руб.
1	400	300
2	50	35
3	200	150
4	150	110

Нормы потребления ресурсов для производства продукции пекарни, их запасы, нормы времени выработки, эффективное время работы оборудования и месячный спрос на продукцию представлены в табл. 2–6 соответственно.

Тогда числовой пример выглядит следующим образом.

1. Прибыль и рентабельность:

Таблица 2. Нормы потребления ресурсов

Ресурс	Продукт			
	1	2	3	4
1	0.4 кг	0.05 кг	0.21 кг	0.17 кг
2	0.1 кг	0.01 кг	0.12 кг	0.08 кг
3	150 кв. см	50 кв. см	90 кв. см	75 кв. см
4	2 шт.	0.25 шт.	1 шт.	0.75 шт.

Таблица 3. Запасы материальных ресурсов

Ресурс			
1	2	3	4
200 кг	120 кг	70 000 кв. см	850 шт.

Таблица 4. Нормы времени выработки

Оборудование	Продукт			
	1	2	3	4
1	25 мин	10 мин	15 мин	12 мин
2	14 мин	6 мин	9 мин	11 мин
3	7 мин	2 мин	3 мин	4 мин

Таблица 5. Эффективное время работы оборудования

Оборудование	Эффективное время работы, ч	К
1	9.09	K1 = 1
2	11.36	K2 = 1
3	7.6	K3 = 1

Таблица 6. Месячный спрос на продукцию, шт.

Продукт			
1	2	3	4
200	250	400	350

$$100x_1 + 15x_2 + 50x_3 + 40x_4 - 5000 \rightarrow \max,$$

$$\frac{100x_1 + 15x_2 + 50x_3 + 40x_4 - 5000}{(300x_1 + 35x_2 + 150x_3 + 110x_4) + 5000} \rightarrow \max.$$

2. Ограничение на материальные ресурсы:

$$0.4x_1 + 0.05x_2 + 0.21x_3 + 0.17x_4 \leq 200,$$

$$0.1x_1 + 0.01x_2 + 0.12x_3 + 0.08x_4 \leq 120,$$

$$150x_1 + 50x_2 + 90x_3 + 75x_4 \leq 70000,$$

$$2x_1 + 0.25x_2 + 1x_3 + 0.75x_4 \leq 850.$$

3. Ограничение на производственную мощность (оборудование). Для расчетов берем 22 рабочих дня:

$$\frac{25}{60}x_1 + \frac{10}{60}x_2 + \frac{15}{60}x_3 + \frac{12}{60}x_4 \leq 9.09 \cdot 22,$$

$$\frac{14}{60}x_1 + \frac{6}{60}x_2 + \frac{9}{60}x_3 + \frac{11}{60}x_4 \leq 11.36 \cdot 22,$$

$$\frac{7}{60}x_1 + \frac{2}{60}x_2 + \frac{3}{60}x_3 + \frac{4}{60}x_4 \leq 7.6 \cdot 22.$$

4. Ограничение на спрос на продукцию:

$$x_1 \leq 200,$$

$$x_2 \leq 250,$$

$$x_3 \leq 400,$$

$$x_4 \leq 350.$$

5. Ограничение на решения (целочисленное, положительное):

$$x_1 \in Z^+,$$

$$x_2 \in Z^+,$$

$$x_3 \in Z^+,$$

$$x_4 \in Z^+.$$

Вычислим значения прибыли и рентабельности переходов λ (рис. 3):

$$\lambda_{\min} \in [0; 0.33],$$

$$\lambda_1 \in [0.34; 0.54],$$

$$\lambda_2 \in [0.54; 0.55],$$

$$\lambda_3 \in [0.55; 0.86],$$

$$\lambda_4 \in (0.86; 1.2),$$

$$\lambda_5 \in [1.2; 1.3),$$

$$\lambda_6 \in [1.3; 1.43),$$

$$\lambda_7 \in [1.43; 2.9),$$

$$\lambda_8 \in [2.9; +\infty).$$

Результаты вычислений представлены в табл. 7:

4. Оптимизация производственной программы в условиях расширения производства. Рассмотрим ситуацию, когда наряду с традиционной продукцией предприятие будет выпускать еще и новые виды продукции: $n+1, \dots, n_1$. Для этого потребуются дополнительные материальные ресурсы: $M+1, M+2, \dots, M_1$ и дополнительное оборудование: $K+1, \dots, K_1$. Для приобретения

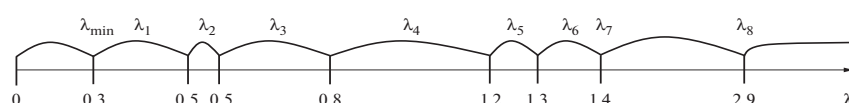


Рис. 3. График расположения переходов λ

Таблица 7. Результаты вычислений для переходов λ

λ	Решения
$0 \leq \lambda \leq 0.33$	Решения сохраняются: $x^p = (200; 0; 400; 53)$, $x^{np} = (200; 0; 400; 53)$
$0.34 \leq \lambda < 0.54$	Решения по прибыли не изменяются, решения по рентабельности изменяются: $x^{np} = (200; 0; 400; 53)$, $x^p = (200; 0; 152; 350)$
$0.54 \leq \lambda < 0.55$	Решения по прибыли не изменяются, решения по рентабельности изменяются: $x^{np} = (200; 0; 400; 53)$, $x^p = (200; 0; 155; 347)$
$0.55 \leq \lambda \leq 0.86$	Решения изменяются по рентабельности: $x^{np} = (200; 0; 400; 53)$, $x^p = (200; 1; 152; 350)$
$0.86 < \lambda < 1.2$	Решения изменяются по рентабельности: $x^{np} = (200; 0; 400; 53)$, $x^p = (200; 250; 13; 350)$
$1.2 \leq \lambda < 1.3$	Решения изменяются по прибыли: $x^{np} = (200; 0; 155; 347)$, $x^p = (200; 250; 13; 350)$
$1.3 \leq \lambda < 1.43$	Решения изменяются по прибыли: $x^{np} = (200; 250; 13; 350)$, $x^p = (200; 250; 13; 350)$
$1.43 \leq \lambda < 2.9$	Решение по прибыли становится равным 0: $x^{np} = (0; 0; 0; 0)$, $x^p = (200; 250; 13; 350)$
$\lambda \geq 2.9$	Решение по рентабельности становится равным 0, далее обе функции принимают значения 0: $x^{np} = (0; 0; 0; 0)$, $x^p = (0; 0; 0; 0)$

дополнительного объема материальных ресурсов и дополнительных единиц оборудования вычисляются инвестиции в объемах $V1$ и $V2$ соответственно.

Задача выбора оптимальной производственной программы в этом случае формулируется следующим образом:

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i - \sum_{i=1}^n b_i x_i - Z_{\text{пост}} \rightarrow \max, \quad (4.1)$$

$$\sum_{i=1}^n l_{ij} \alpha_i \leq L_j + Z_j, \quad j = \overline{1, M}, \quad (4.2)$$

$$\sum_{i=n+1}^{n_1} l_{ij} \alpha_i \leq Z_j, \quad j = \overline{M+1, M_1}, \quad (4.3)$$

$$\sum_{i=1}^n t_{ie} x_i \leq (K_e + y_e) \tau_e, \quad e = \overline{1, K}, \quad (4.4)$$

$$\sum_{i=n+1}^{n_1} t_{ie} x_i \leq y_e \tau_e, \quad e = \overline{K+1, K_1}, \quad (4.5)$$

$$\sum_{j=1}^{M_1} Z_j \beta_j \leq V_1, \quad (4.6)$$

$$\sum_{e=1}^{K_1} y_e \gamma_e \leq V_2, \quad (4.7)$$

$$x_i \leq P t_i, \quad i = \overline{1, n_1}, \quad (4.8)$$

$$x_i \in Z^+, \quad i = \overline{1, n_1}, \quad (4.9)$$

$$y_e \in Z^+, \quad e = \overline{1, K_1},$$

$$Z_j \geq 0, \quad j = \overline{1, M_1}.$$

5. Анализ устойчивости в условиях расширения производства. Рассмотрим ситуацию роста маржинального дохода $C_i(\xi)$ при росте инфляции ξ в модели (4.1) – (4.9). Будем считать $C_i(\xi) = a_i(\xi) - b_i(\xi)$, а в общем случае:

$$C_i(\xi) = C_i(0) + \varphi_i(\xi), \quad i = \overline{1, n}. \quad (5.1)$$

Здесь

$$\frac{d\varphi_i(\xi)}{d\xi} \geq 0, \quad \varphi_i(0) = 0 \text{ и } \varphi_i(\xi) > 0;$$

$C_i(0)$ – маржинальный доход в начальный момент времени $t=0$.

Пусть $\bar{X} = \{x^1, \dots, x^N\}$ – множество допустимых производственных программ в модели (4.1) – (4.9), x^ℓ – оптимальная производственная программа.

Изменение целевой функции (1.1) на решении x^ℓ , при росте инфляции можно описать следующей функцией:

$$f^\ell(\xi) = \sum_{i=1}^n C_i(\xi) x_i^\ell + Z_{\text{пост}}. \quad (5.2)$$

Аналогичным образом можно задать значение целевой функции (4.1) на любой другой производственной программе x^j ($j = \overline{1, N}; j \neq \ell$):

$$f^j(\xi) = \sum_{i=1}^n C_i(\xi) \cdot x_i^j + Z_{\text{пост}}. \quad (5.3)$$

Возникает вопрос: если x^l было оптимально при $\xi = 0$, останется ли оно оптимальным при изменении $\xi \in (0, \theta)$?

Продифференцируем $f^l(\xi)$ и $f^j(\xi)$ по ξ с учетом соотношения (5.1). Получаем

$$\frac{df^l(\xi)}{d\xi} = \sum_{i=1}^n \frac{d\varphi_i(\xi)}{d\xi} x_i^l, \quad (5.4)$$

$$\frac{df^j(\xi)}{d\xi} = \sum_{i=1}^n \frac{d\varphi_i(\xi)}{d\xi} x_i^j.$$

Если $\varphi_i(\xi)$ линейные функции:

$$\frac{df^l(\xi)}{d\xi} \geq \frac{df^j(\xi)}{d\xi}, \quad \forall \xi \in (0, \theta), \quad (5.5)$$

то легко понять, что производственная программа x^l остается оптимальной для всех решений $\xi \in (0, \theta)$. Если же существует $K, K = 1, N$, такое, что

$$\frac{df^K(\xi)}{d\xi} > \frac{df^l(\xi)}{d\xi}, \quad \forall \xi \in (0, \theta), \quad (5.6)$$

то при определенном значении ξ^* оптимальной становится программа x^K .

Значение ξ^* определяется из следующего уравнения:

$$f^K(\xi) = f^l(\xi). \quad (5.7)$$

В силу линейности $\varphi_i(\xi)$ уравнение (5.7) будет иметь единственное решение, которое мы обозначим ξ^* .

Таким образом, при $\xi \leq \xi^*$ оптимальным будет решение x^l , при $\xi \geq \xi^*$ — решение x^K , при $\xi = \xi^*$ — решение x^l и x^K . Область изменения $\xi^* \in [0, \xi^*]$ — область устойчивости для решения x^l .

Если существует несколько производственных программ $x^{K_1}, \dots, x^{K_M}$, для которых выполняется условие (5.6), то решается M уравнений, находятся решения $\xi_1, \dots, \xi_M$ и в качестве точки перехода на новую оптимальную производственную программу выбирается точка $\xi^* = \min\{\xi_1, \dots, \xi_M\}$.

В силу линейности $f^j(\xi)$ число переходов на новую оптимальную производственную программу будет конечно и не будет превышать числа $N - 1$. Если же $\varphi_i(\xi)$ нелинейны, то нелинейны и $f^j(\xi)$ ($i = 1, n; j = 1, N$). Тогда количество переходов от одной оптимальной производственной программы к другой может быть бесконечным при $\xi \in (0; \infty)$ уже для $N = 2$.

Приведем пример этой ситуации для случая, когда $\varphi_i(\xi)$ кусочно-линейны (рис. 4).

Изменение оптимальной производственной программы может быть связано с ростом стоимости материальных ресурсов и стоимости оборудования при росте инфляции, а также с падением спроса при росте инфляции. Рассмотрим ситуацию, когда цена материальных ресурсов зависит от инфляции следующим образом:

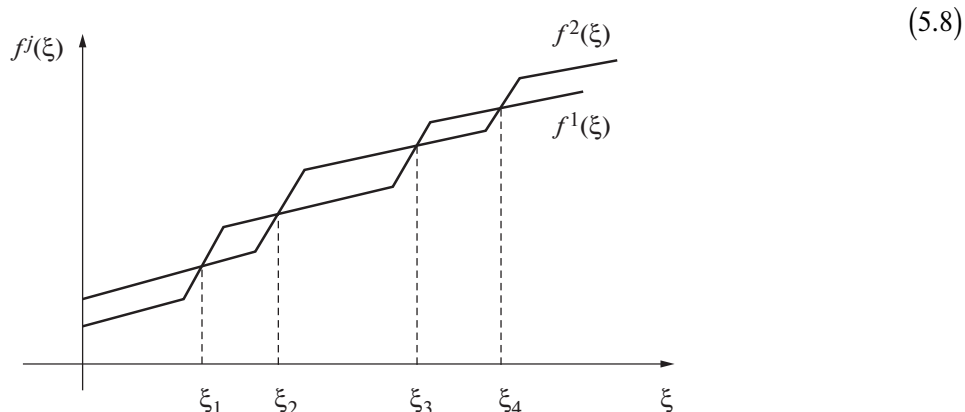


Рис. 4. Несколько точек перехода от одной оптимальной производственной программы к другой в условиях расширения производства

$$\beta_j(\xi) = \beta_j(0) + \psi_j(\xi),$$

где $\psi_j(\xi) \geq 0, \forall \xi$ и

$$\frac{d\psi_j(\xi)}{d\xi} > 0.$$

Здесь $\beta_j(0)$ — стоимость материального ресурса j в начальный момент времени $t = 0$. В этом случае неравенство (4.6) можно переписать в следующем виде:

$$\sum_{j=1}^{M_1} Z_j \beta_j(\xi) \leq V_1. \quad (5.9)$$

С учетом того, что с ростом ξ правая часть неравенства (5.9) растет, а объем инвестиций V_1 не меняется, можно вычислить такое ξ_r , при котором

$$\sum_{j=1}^{M_1} Z_j \beta_j(\xi) = V_1. \quad (5.10)$$

Дальнейший рост инфляции приведет к тому, что объем затрат на материальные ресурсы (левая часть равенства (5.10)) станет больше, чем объем инвестиций V_1 . Следовательно, невозможно обеспечить производственную программу x^I (оптимальную в момент времени t) необходимым объемом материальных ресурсов и, следовательно, предприятие будет выпускать продукцию в меньших объемах, т. е. необходим переход при уровне инфляции ξ_r от производственной программы x^I к новой программе $x^\tau, \tau = 1, N$.

Аналогичная ситуация при росте цен на оборудование. Если их изменение происходит по закону, описываемому следующей формулой:

$$\gamma_l(\xi) = \gamma_l(0) + \chi_l(\xi), \quad (5.11)$$

где $\chi_l(\xi) \geq 0, \chi_l(\xi) = 0$ и

$$\frac{d\chi_l(\xi)}{d\xi} > 0,$$

то существует ξ_j при котором неравенство (4.7) будет иметь вид

$$\sum_{l=1}^{K_1} Y_l \gamma_l(\xi_j) = V_2. \quad (5.12)$$

Следовательно, при $\xi = \xi_j$ также будет переход на новую оптимальную производственную программу X^j .

Наконец, естественно предположить, что спрос Pt_i будет падать с ростом инфляции. Пусть это падение описывается формулой

$$Pt_i(\xi) = Pt_i(0) - Q_i(\xi), \quad (5.13)$$

где $Q_i(\xi) = 0$ при $\xi = 0$; $Q_i(\xi) \geq 0$ при $\xi > 0$;

$$\frac{dQ_i(\xi)}{d\xi} > 0$$

для $\forall \xi \in (0, \theta)$.

Рассмотрим (4.8) с учетом (5.13):

$$x_i \leq Pt_i(\xi), i = \overline{1, n_1}, \quad (5.14)$$

Так как x^I оптимально, при $\xi = 0$ также должно выполняться

$$x_i^I \leq Pt_i(\xi), i = \overline{1, n_1}. \quad (5.15)$$

Так как правая часть в (5.15) уменьшается с ростом ξ , то существует ξ_p и существует γ , такие, что

$$x_\gamma^l = Pt_\gamma(\xi_p). \quad (5.16)$$

Следовательно, при $\xi > \xi_p$ производственная программа x^l перестает быть допустимой и, следовательно, предприятие вынуждено снижать объем выпуска, переходя к другой производственной программе $x^p, p = 1, N$.

Таким образом, при изменении маржинального дохода $C_i(\xi)$, $i = \overline{1, n_1}$, на материальные ресурсы $\beta_j(\xi)$, $j = \overline{1, M_1}$, цен на оборудование $\gamma_l(\xi)$, $l = \overline{1, K_1}$, и спроса $Pt_i(\xi)$, $i = \overline{1, n_1}$, под влиянием инфляции ξ произойдет переход на новую оптимальную производственную программу. Константы n_1, M_1, K_1 определены нами в начале разд. 4. Уровень инфляции ξ , при котором произойдет этот переход вычисляется по формуле

$$\xi = \min \{ \xi_c, \xi_\beta, \xi_\gamma, \xi_p \}.$$

6. Динамическая модель выбора оптимальной производственной программы. Рассмотрим ситуацию, когда материальные ресурсы поступают динамически на вход производственной системы с интенсивностью $L_j(t)$, $j = \overline{1, M}$. В этом случае интенсивность выпуска конечной продукции также будет задана динамически как $x_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, и задача выбора оптимальной производственной программы может быть сформулирована следующим образом:

$$\sum_{i=1}^n \int_0^T C_i(t) x_i(t) dt \rightarrow \max. \quad (6.1)$$

Здесь $C_i(t) = a_i(t) - b_i(t)$

$$\sum_{i=1}^n \int_{ij}^t x_i(t') dt' \leq \int_0^t L_j(t) dt, \quad j = \overline{1, M}, \quad \forall t \in (0, T), \quad (6.2)$$

$$\sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} x_i(t') dt' \leq \frac{t_2 - t_1}{T} k_l \tau_l, \quad l = \overline{1, K}, \quad (6.3)$$

$$\forall t_1, t_2 (t_2 > t_1), \quad t_1 \in (0, T), \quad t_2 \in (0, T),$$

$$\int_0^T x_i(t) dt \leq Pt_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (6.4)$$

$$x_i(t) \geq 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (6.5)$$

Неравенство (6.2) задает ограничения на потребление материальных ресурсов; неравенство (6.3) – ограничения на производственные мощности с учетом равномерной загрузки оборудования.

Задача (6.1) – (6.5) является задачей оптимального управления. Она может быть сведена к задаче линейной целочисленной оптимизации следующим образом. Разобьем интервал $(0, T)$ на конечное число отрезков времени (дней) и будем полагать, что $x_{i\tau}$ – объем выпуска продукции в день с номером τ , а $L_{j\tau}$ – объем поступления материальных ресурсов j в день τ . Тогда задача (6.2) – (6.5) может быть переписана следующим образом:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{\tau=1}^T c_{i\tau} x_{i\tau} \rightarrow \max, \quad (6.6)$$

где $c_{i\tau}$ – маржинальный доход от выпуска одной единицы продукции i в день τ :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{\tau=1}^{\theta} l_{ij} x_{i\tau} \leq \sum_{\tau=1}^{\theta} L_{j\tau}, \quad j = \overline{1, M}, \quad \theta = \overline{1, T}, \quad (6.7)$$

$$\sum_{i=1}^n t_{il} x_{i\tau} \leq \frac{1}{T} k_l \tau_l, \quad l = \overline{1, K}, \quad \tau = \overline{1, T}, \quad (6.8)$$

$$\sum_{\tau=1}^T x_{i\tau} \leq P t_i, \quad (6.9)$$

$$x_{i\tau} \in Z^+, \quad i = \overline{1, n}, \quad \tau = \overline{1, T}. \quad (6.10)$$

Таким образом, задача (6.6) – (6.10) является задачей целочисленной линейной оптимизации, в которой переменные $x_{i\tau}$ задают объем выпуска продукции i в день с номером τ .

7. Устойчивость решений динамической модели. Рассмотрим ситуацию, когда $c_{i\tau}$ могут меняться в зависимости от параметра ξ следующим образом: $c_{i\tau}(\xi) = c_{i\tau} + \varphi_{i\tau}(\xi)$, где $\varphi_{i\tau}(\xi)$ – возрастающая непрерывная функция и $\varphi_{i\tau}(0) = 0$. Рассмотрим ситуацию, когда $\varphi_{i\tau}(\xi)$ линейна и $\varphi_{i\tau}(\xi) = c_{i\tau} * \alpha_{i\tau} * \xi$.

Пусть $\bar{x} = \{x^1, \dots, x^n\}$ – множество допустимых решений задачи (6.6) – (6.10) и решение $x^l = x_{i\tau}^l$ оптимально при $\xi = 0, l = \overline{1, N}$, и обозначается через $f^l(\xi)$:

$$f^l(\xi) = \sum_{i=1}^n \sum_{\tau=1}^T c_{i\tau}(\xi) x_{i\tau}^l.$$

Тогда

$$\frac{df^l(\xi)}{d\xi} = \sum_{\tau=1}^T \sum_{i=1}^n c_{i\tau} \alpha_{i\tau} x_{i\tau}^l.$$

Для любого другого $j = \overline{1, N}, j \neq l$;

$$\frac{df^j(\xi)}{d\xi} = \sum_{\tau=1}^T \sum_{i=1}^n c_{i\tau} \alpha_{i\tau} x_{i\tau}^j.$$

Очевидно, что если существует такое $k, k = \overline{1, N}, k \neq l$, такое, что

$$\frac{df^k(\xi)}{d\xi} > \frac{df^l(\xi)}{d\xi},$$

то линейное уравнение $f^k(\xi) = f^l(\xi)$ имеет одно положительное решение. Пусть это решение равно ξ^* . Тогда очевидно, что при $\xi \in (0, \xi^*)$ оптимальной будет производственная программа x^l , а при $\xi > \xi^*$ оптимальной производственной программой будет x^k . При $\xi = \xi^*$ оптимальной станет и программа x^k , и программа x^l , отрезок $(0, \xi^*)$ назовем областью устойчивости решения x^l .

Если $\varphi_{i\tau}(\xi)$ нелинейны, то соответственно

$$\frac{df^j(\xi)}{d\xi} = \sum_{i=1}^n \sum_{\tau=1}^T \frac{d\varphi_{i\tau}(\xi)}{d\xi} x_{i\tau}^j, \quad j = \overline{1, N}.$$

Если в этом случае x^l оптимально при $\xi = 0$, то для перехода на новое оптимальное решение x^k необходимым условием является существование отрезка $[\xi_1, \xi_2]$, на котором

$$\frac{df^k(\xi)}{d\xi} > \frac{df^l(\xi)}{d\xi}, \quad \forall \xi \in [\xi_1, \xi_2].$$

Достаточным условием выступает выполнение приведенных далее требований:

$$a) \exists [\xi_1, \xi_2]; \frac{df^k(\xi)}{d\xi} > \frac{df^l(\xi)}{d\xi}, \quad \forall \xi \in [\xi_1, \xi_2],$$

$$b) \exists \xi^*; f^k(\xi^*) = f^l(\xi^*), \quad \forall \xi^* \in [\xi_1, \xi_2].$$

8. Анализ устойчивости производственной программы, пример. Рассмотрим следующую задачу:

$$\sum_{i=1}^n c_{i(\xi)} x_i \rightarrow \max, \quad (8.1)$$

$$\sum_{i=1}^n l_{ij} x_i \leq L_j; j = \overline{1, M}, \quad (8.2)$$

$$\sum_{i=1}^n t_{il} x_i \leq k_l \tau_l; l = \overline{1, K}, \quad (8.3)$$

$$x_i \leq P t_i; i = \overline{1, n}, \quad (8.4)$$

$$\begin{aligned} x_i &\in Z^+, \\ c_{i(\xi)} &= a_{i(\xi)} - b_{i(\xi)}. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Пусть у задачи (8.1) – (8.5) есть два допустимых решения:

$$\begin{aligned} x^1 &= (x_1^1, x_2^1) = (1, 2) \text{ и } x^2 = (x_1^2, x_2^2) = (2, 1), \\ C_1(0) &= C_1 = 2; C_2(0) = C_2 = 1. \end{aligned}$$

Допустим также, что $C_1(\xi)$ и $C_2(\xi)$ – линейные функции:

$$C_i(\xi) = C_i + C_i * q_i * \xi; i = 1, 2; q_1 = 1; q_2 = 5,$$

$$f^j(\xi) = \sum_{i=1}^n C_i(\xi) * x_i^j; j = 1, 2.$$

$$f^j(0) = \sum_{i=1}^n C_i(x_i^j) = f^1(0) = 1 * 2 + 2 * 1 = 4; f^2(0) = 2 * 2 + 1 * 1 = 5.$$

Следовательно, при $\xi = 0$ оптимальна программа x^2 .

Рассчитаем $f^1(\xi) = 1(2 + 2 * 1 * \xi) + 2(1 + 1 * 5 * \xi) = 4 + 12\xi$,

$$f^2(\xi) = 2(2 + 2 * 1 * \xi) + 1(1 + 1 * 5 * \xi) = 5 + 9\xi,$$

$$\frac{df^1(\xi)}{d\xi} = 12; \frac{df^2(\xi)}{d\xi} = 9,$$

т.е.

$$\frac{df^1(\xi)}{d\xi} \geq \frac{df^2(\xi)}{d\xi}.$$

Тогда есть $\xi^* \geq 0$, при котором $f^2(\xi^*) = f^1(\xi^*)$, начиная с которого $f^1(\xi) > f^2(\xi)$, $\xi > \xi^*$. Следовательно, при $\xi \geq \xi^*$ оптимальной будет программа $x^1 = (1, 2)$. Интервалом устойчивости в этом случае для x^1 станет $(0, \xi^*)$. Для данного примера ξ^* вычисляется путем решения уравнения:

$$f^1(\xi) = f^2(\xi)$$

$$4 + 12\xi = 5 + 9\xi$$

$$\xi = 1/3, \text{ т.е. } \xi^* = 1/3.$$

Пусть при $\xi = 2$ промежуточное изменение коэффициентов q_1 и q_2 равно $q_1 = 1$ и $q_2 = 5$. Рассчитаем $f^1(\xi)$ и $f^2(\xi)$ для $\xi = 2$:

$$f^1(\xi) = 4 + 12 * 2 = 4 + 24 = 28,$$

$$f^2(\xi) = 5 + 9 * 2 = 5 + 18 = 23.$$

При изменении q_1 и q_2 как $\xi = 2$ получили следующее задание $f^1(\xi)$ и $f^2(\xi)$:
для $f^1(\xi)$:

$$28 = 9 * 2 + b \Rightarrow b = 10,$$

$$f^1(\xi) = 9\xi + 10 \text{ для } \xi > 2,$$

для $f^2(\xi)$:

$$23 = 12 * 2 + b \Rightarrow b = -1,$$

$$f^2(\xi) = 12\xi - 1,$$

$$\frac{df^2(\xi)}{d\xi} > \frac{df^1(\xi)}{d\xi},$$

а следовательно, возникает точка перехода. Решаем уравнение:

$$12\xi - 1 = 9\xi + 10,$$

$$\xi = 11 : 3 = 3\frac{2}{3}.$$

Начиная с $3\frac{2}{3}$ оптимальным будет снова решение x^2 .

Таким образом, область устойчивости для решения x^1 — это интервал $\left[\frac{1}{3}; 3\frac{2}{3}\right]$, а область устойчивости для x^2 — интервал $\left[0; \frac{1}{3}\right]$ и $\left[3\frac{2}{3}; \infty\right)$ (рис. 5).

Заключение. Предложено использование метода ветвей и границ, основанного на вычислении верхней, нижней и текущих верхних оценок при анализе различных вариантов производственных программ, который обеспечивает выбор оптимальной производственной программы предприятия. Представлена верхняя оценка числа допустимых производственных программ. Показано, что наряду с критерием прибыли при выборе производственной программы может использоваться критерий рентабельности. Показано, что при определенных условиях оптимальные производственные программы по критериям прибыли и рентабельности совпадают. Проведен анализ устойчивости производственных программ при изменениях исходных данных модели и критерия оптимальности модели, в том

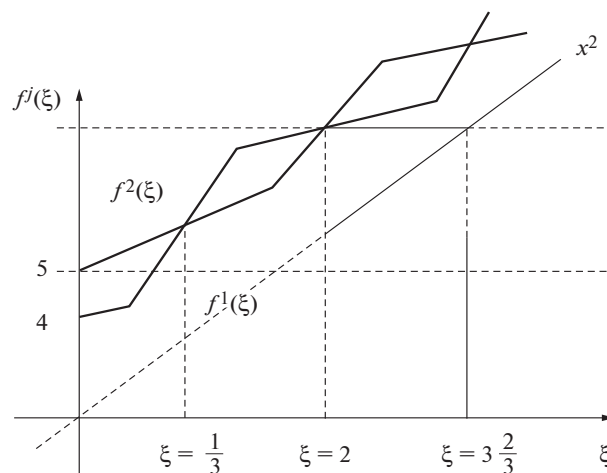


Рис. 5. Области устойчивости для решений задачи

числе при нелинейном изменении доходности производственной программы от инфляции в условиях расширения производства.

Представлены различные модели выбора оптимальной производственной программы. В рамках рассмотрения динамической модели выбора, описывающей ситуацию, при которой материальные ресурсы поступают динамически на вход производственной системы с интенсивностью выпуска конечной продукции, которая также задана динамически, сформулирована задача выбора оптимальной производственной программы.

Предлагаемые методы и модели можно использовать при реинжиниринге производственных и управленческих процессов, в рамках проектного управления на предприятиях для повышения эффективности производственных и управленческих процессов. Применение моделей позволит руководству предприятия более эффективно планировать реализацию проектов, оценивать объем необходимых для реализации проектов ресурсов, увидеть направления совершенствования процессов управления проектами, оптимизировать проектную деятельность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Brucker P., Jurisch B., Jurisch M.* Open Shop Problems with Unit Time Operations, ZOR // Methods and Models of Operations Research. 1993. V. 37. P. 59–73.
2. *Coffman E.G., Nozari A., Yannakakis M.* Optimal Scheduling of Products with Two Subassemblies on a Single Machine // Oper. Res. 1989. V. 37. P. 426–436.
3. Данилин В.И. Финансовое и операционное планирование в корпорации РАНХиГС. М., 2014.
4. Мищенко А.В., Халиков М.А. Распределение ограниченных ресурсов в задаче оптимизации производственной деятельности предприятия // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1991. № 6.
5. Мищенко Л.В., Пилюгина Л.В. Динамические модели управления научно-производственными системами // Вестн. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2019. № 2.
6. Мищенко А.В., Сушков Б.Г. Задача оптимального распределения ресурсов на сетевой модели при линейных ограничениях на время выполнения работ // ЖВМ и МФ. 1980. Т. 10. № 5.
7. Мищенко А.В., Коголовский В.М. Проблемы устойчивости задач производственного планирования в машиностроении // Экономика и мат. методы. 1992. № 3.
8. Мищенко А.В. Устойчивость решений в задаче перераспределения транспортных средств в случае экстренного закрытия движения на участке метрополитена // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1990. № 3.
9. Мищенко А.В. Задача распределения транспортных средств по автобусным маршрутам при неточно заданной матрице корреспонденций пассажиропотока // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1992. № 2.
10. Катюхина О.А., Мищенко А.В. Динамические модели управления транспортными ресурсами на примере организации работы автобусного парка // Аудит и финансовый анализ. 2016. № 2. С. 156–167.
11. Косоруков Е.О., Фуругян М.Г. Некоторые алгоритмы распределения ресурсов в многопроцессорных системах // Вестн. МГУ. Сер. 15. Вычисл. математика и кибернетика. 2009. № 4. С. 34–37.
12. Фуругян М.Г. Планирование вычислений в многопроцессорных АСУ реального времени с дополнительным ресурсом // АиТ. 2015. № 3.
13. Косоруков Е.О., Фуругян М. Г. Алгоритмы распределения ресурсов в многопроцессорных системах с нефиксированными параметрами // Некоторые алгоритмы планирования вычислений и организации контроля в системах реального времени. М.: ВЦ РАН, 2011. С. 40–51.
14. *Mironov A.A., Tsurkov V.I.* Transport-type Problems with a Criterion // АиТ. 1995. №12. С. 109–118.
15. *Миронов А.А., Цурков В.И.* Наследственно минимаксные матрицы в моделях транспортного типа // Изв. РАН. ТиСУ. 1998. № 6. С. 104–121.
16. *Mironov A.A., Levkina T.A., Tsurkov V.I.* Minimax Estimations of Expectates of Are Weights in Integer Networks with Fixed Node Degrees // Applied and Computational Mathematics. 2009. V. 8. № 2. P. 216–226.
17. *Mironov A.A., Tsurkov V.I.* Class of Distribution Problems with Minimax Criterion // Doklady Akademii Nauk. 1994. V. 336. № 1. P. 35–38.
18. *Tizik A.P., Tsurkov V.I.* Iterative Functional Modification Method for Solving a Transportation Problem // Automation and Remote Control. 2012. V. 73. № 1. P. 134–143.
19. *Mironov A.A., Tsurkov V.I.* Hereditarily Minimax Matrices in Models of Transportation Type // J. Computer and Systems Sciences International. 1998. V. 37. № 6. P. 927–944.
20. *Mironov A.A., Tsurkov V.I.* Minimax in Transportation Models with Integral Constraints. I // J. Computer and Systems Sciences International. 2003. V. 42. № 4. P. 562–574.
21. Борисов И.А. Методика сравнительного анализа и оптимального выбора варианта управления проектами // Альманах «Крым». 2023. № 38–4.
22. Борисов И.А. Кластеризация проектов в целях повышения эффективности процессов проектного управления в ФНС России // Экономика и управление: проблемы, решения. 2023. № 8. Т. 3. С. 153–160.