

ОПТИМАЛЬНЫЕ ДВИЖЕНИЯ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ, УПРАВЛЯЕМОГО ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИМ АКТЮАТОРОМ

© 2024 г. Г. В. Костин¹, *

¹ИПМех РАН, Москва, Россия

*e-mail: kostin@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 15.03.2024 г.

После доработки 27.03.2024 г.

Принята к публикации 13.05.2024 г.

Исследуются продольные колебания упругого стержня, управляемого нормальными силами в поперечном сечении, которые равномерно распределены по длине на выбранном интервале. Такая система может быть реализована с помощью актюатора, состоящего из пьезоэлектрических элементов, расположенных вдоль оси стержня. Найдены критерии неуправляемости отдельных мод колебаний. Обобщенное решение начально-краевой задачи находится с помощью бегущих волн Даламбера, которые определяются на образуемой характеристиками пространственно-временной сетке. Линейные комбинации функций бегущих волн и управления задают в энергетическом пространстве искомые перемещения и динамический потенциал. Последний определенным образом связывает плотность импульса и силу в сечении. Ставится задача перевода стержня за фиксированное время в предписанное состояние с минимизацией нормы управляющей силы. Оптимальное движение и соответствующий программный закон воздействия находятся сведением исходной задачи к одномерной вариационной. В примере показано управление колебаниями для определенных геометрических параметров пьезоэлектрического актюатора.

Ключевые слова: упругий стержень, пьезоэлектрические силы, метод Фурье, оптимальное управление, бегущие волны

DOI: 10.31857/S0002338824030101 EDN: UPROIB

OPTIMAL MOTIONS OF AN ELASTIC ROD CONTROLLED BY A PIEZOELECTRIC ACTUATOR

G.V. Kostin^a, *

^aIshlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia

*e-mail: kostin@ipmnet.ru

The longitudinal vibrations of an elastic rod controlled by normal forces in the cross section, which are uniformly distributed along the length over a selected interval, are studied. Such a system can be implemented using an actuator consisting of piezoelectric elements located along the axis of the rod. Criteria for the uncontrollability of individual vibration modes are given. A generalized solution to the initial-boundary value problem is found applying d'Alembert traveling waves, which are determined on the space-time mesh formed by characteristics. Linear combinations of the traveling wave and control functions define the sought displacements and dynamic potential in the energy space. The latter in a certain way relates the momentum density and the force in the cross section. The problem is to transfer the rod to a prescribed state in a fixed time while minimizing the norm of the control force. The optimal motion and the corresponding feedforward control law are found by reducing the original problem to a one-dimensional variational one. The example shows the control of vibrations for certain geometric parameters of the piezoelectric actuator.

Keywords: elastic rod, piezoelectric forces, Fourier method, optimal control, traveling waves

Введение. Важным вопросом теории управления представляется возможность приведения распределенной колебательной системы в предписанное состояние с помощью нагрузки, которая воздействует на часть области определения параметров движения. При рассмотрении подобных систем возникает необходимость управлять уравнениями в частных производных

(УЧП). Функции управления могут определять правые части как краевых условий, так и самих УЧП [1, 2]. Граничное воздействие часто более удобно при реализации в различных приложениях, но построение закона такого управления бывает затруднено, в частности вследствие ограничений на скорость распространения сигнала от границы [3]. Если же управление распределено по всей области расположения системы, то иногда возможна декомпозиция движений и построение оптимального воздействия на каждую моду колебаний [4, 5]. Подобное управление бывает трудно реализовать на практике, и может возникнуть необходимость его пространственной дискретизации таким образом, что воздействие будет производиться только на часть системы или распределяться по определенному закону.

В работе исследуются продольные колебания упругого стержня, управляемого нормальными силами в поперечном сечении, которые равномерно распределены по длине на заданном интервале, а вне его равны нулю. На практике эти продольные силы растяжения и сжатия можно создавать, например, группой расположенных и работающих симметрично относительно поперечного сечения пьезоэлектрических элементов, которые образуют единый пьезоактюатор (ПА). Антисимметрично работающие элементы возбуждают изгибные колебания, и такой случай изучен в работе [6]. Создаваемая переменная по времени сила в рассмотренной далее модели считается постоянно распределенной вдоль ПА [7].

Обычно подобные конструкции описываются УЧП, в правых частях которых появляется дельта-функция или даже ее производная вследствие пространственного скачка пьезоэлектрических сил при переходе от ПА к свободному от воздействия участку [8]. Это означает, что решение строится в терминах обобщенных функций. В этом исследовании применяется метод интегродифференциальных соотношений (МИДС) [9], который позволяет корректно сформулировать обобщенную начально-краевую задачу о движении упругого стержня и построить аналитически решение оптимизационной задачи управления в энергетическом классе функций состояния для соответствующих начальных условий [10]. Механическое состояние стержня описывает функция перемещения его точек и так называемый динамический потенциал, линейно через первые производные связанный как с плотностью импульса, так и с результирующей нормальной силой в поперечном сечении.

Движения для однородного стержня представляются в виде линейной комбинации бегущих волн Даламбера, определенных на заданной характеристиками пространственно-временной сетке. Задача оптимизации сводится к одномерной краевой вариационной задаче, которая решается в квадратурах. Ранее такой подход использовался для построения оптимального управления колебаниями в случае свободного стержня с группой ПА либо когда между ПА отсутствуют промежутки [10], либо когда они расположены периодически [11]. Был рассмотрен частный случай горизонта управления, кратного в безразмерных единицах длине ПА [12]. В работах [10, 13] затронут вопрос управляемости отдельных мод колебаний и разбиения мод на группы, каждая из которых управляется определенной комбинацией входов.

Главное отличие описанных далее результатов — это особые краевые условия (консольное закрепление) и управление всего лишь одним ПА. Как было показано ранее, использование определенных конфигураций ПА может приводить к потере управляемости некоторыми группами мод, что является частным случаем вопроса о неуправляемости волнового уравнения при воздействии только на часть длины [14]. Далее будет показано, что от геометрических параметров ПА зависит как управляемость, так и эффективность гашения колебаний. Выбор наилучшего расположения ПА — важная задача для инженерных приложений [15–17], когда размеры актюаторов фиксированы из-за определенных технических ограничений.

1. Классическая постановка начально-краевой задачи. Исследуются продольные колебания тонкого однородного упругого стержня длины ℓ , схематически представленного на рис. 1. Ось x с началом координат, расположенном в жестко закрепленном конце стержня, направлена на его свободный от нагрузок конец. Продольная жесткость задается коэффициентом $\kappa > 0$, а линейная плотность определена как $\rho > 0$.

Кроме упругих напряжений в поперечном сечении стержня с помощью ПА возбуждается сила $f(t, x)$, произвольно изменяющаяся на временном интервале $t \in \mathcal{T} = (0, T)$ и кусочно-постоянно распределенная по длине $x \in \mathcal{X} = (0, \ell)$. В рамках простейшей модели [7] такая сила постоянна на интервале $x \in \mathcal{U} = (x^-, x^+) \subset \mathcal{X}$ и равна нулю вне его:

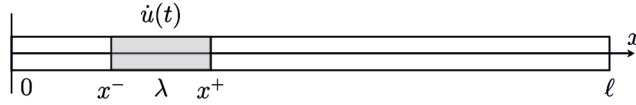


Рис. 1. Схема стержня с управляющим пьезоэлектрическим актюатором.

$$f(t, x) = \begin{cases} \dot{u}(t), & x \in \mathcal{U}, \\ 0, & x \notin \mathcal{U}, \end{cases} \quad u(0) = 0. \quad (1.1)$$

Здесь введена функция управления $u: \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$. Участок стержня длины $\lambda = x^+ - x^-$, на котором возникают сжимающие или растягивающие пьезоэлектрические напряжения, выделен на рис. 1 серым тоном.

Определим область задания переменных состояния системы в виде $\mathcal{D} = \mathcal{T} \times \mathcal{X}$. В качестве неизвестных выбираются перемещения точек стержня $w: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, линейная плотность импульса $p: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ и суммарная нормальная сила в поперечном сечении $s: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$.

Функции p и s связывает закон изменения импульса (второй закон Ньютона):

$$\partial_t p(t, x) = \partial_x s(t, x), \quad (t, x) \in \mathcal{D}. \quad (1.2)$$

Здесь и далее символ ∂_t означает частную производную по времени t , а ∂_x — по пространственной координате x .

Согласно локальным законам состояния, импульс p в свою очередь линейно зависит от скорости, сила s — аффинно от деформации:

$$p(t, x) = \rho \partial_t w(t, x), \quad s(t, x) = \kappa \partial_x w(t, x) + f(t, x), \quad (t, x) \in \mathcal{D}. \quad (1.3)$$

В классической постановке задачи, если сила f непрерывно дифференцируема по x [18], уравнение движения получается после исключения в (1.2) переменных p и s в соответствии с (1.3):

$$\rho \partial_{tt} w(t, x) - \kappa \partial_{xx} w(t, x) = \partial_x f(t, x), \quad (t, x) \in \mathcal{D}. \quad (1.4)$$

Дополнительно на положение и импульс точек стержня накладываются начальные условия:

$$p(0, x) = p_0(x), \quad w(0, x) = w_0(x), \quad x \in \mathcal{X}, \quad (1.5)$$

где w_0 и p_0 — известные достаточно гладкие функции [19]. На концах стержня заданы краевые условия:

$$w(t, 0) = 0, \quad s(t, \ell) = 0, \quad t \in \mathcal{T}. \quad (1.6)$$

Следует сразу отметить, что функция f кусочно-постоянна по x , но при этом из физических соображений стержень должен оставаться неразрывным телом, а сила s , согласно третьему закону Ньютона, не может иметь скачков. Это накладывает определенные ограничения на класс допустимых начальных распределений w_0 и p_0 , а также на управляющую функцию u .

Согласно МИДС [9], для перехода к обобщенной формулировке начально-краевой задачи (1.2)–(1.6) введем на области \mathcal{D} «динамический» потенциал $v: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ таким образом, чтобы были верны соотношения

$$p = \partial_x v, \quad s = \partial_t v. \quad (1.7)$$

После подстановки (1.7) в (1.2) убеждаемся, что второй закон Ньютона выполняется автоматически.

Чтобы исключить из рассмотрения переменные p и s , перепишем уравнения состояния (1.3) в виде:

$$\begin{aligned} \partial_t v(t, x) &= \kappa \partial_x w(t, x), & (t, x) \in \mathcal{D}, \\ \partial_x v(t, x) &= \rho \partial_t w(t, x) + f(t, x), & (t, x) \in \mathcal{D}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Через неизвестные v , w выражаются как начальное состояние (1.5), так и краевые условия (1.6):

$$\begin{aligned} v(0, x) = v_0(x) = c_0 - \int_x^1 p_0(\chi) d\chi, \quad w(0, x) = w_0(x), \quad x \in \bar{X}; \\ w(t, 0) = 0, \quad v(t, \ell) = c_0, \quad t \in \bar{T}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Как будет показано далее, ненулевая правая часть в последнем краевом условии из (1.9) вводится, чтобы обеспечить требуемую непрерывность решения. Таким образом, сопрягаются начальное и краевое условия на v при $t=0$ и $x=\ell$. Подчеркнем особенность такого представления механического состояния системы: динамическая переменная v определяется с точностью до калибровочной константы c_0 , выбор значения которой не влияет на искомое движение упругого стержня, изначально заданного через переменные p , s , w . Поэтому для удобства выбираем $c_0=0$.

2. Обобщенная формулировка задачи оптимального управления. Разрывный характер управляющей силы (1.1) не позволяет использовать дифференциальные соотношения (1.8) для определения состояния стержня на всей области \mathcal{D} [19]. Для расширения класса решений, согласно МИДС [9], два локальных уравнения состояния (1.8) можно преобразовать в одно глобальное, которое определяет интегральную невязку некоторой функции от неизвестных v и w . Тогда поиск решения сведется к условной минимизации функционала, квадратичного по первым производным от кинематической и динамической переменных.

Соответствующая обобщенная начально-краевая задача формулируется следующим образом. Даны функции $v_0, w_0 \in H^1(\mathcal{X})$ и $f \in L^2(\mathcal{D})$, т.е. начальные распределения со своими первыми производными и возбуждаемая сила квадратично-интегрируемы на своих областях определения. Следует найти такие функции состояния $v^*(t, x), w^*(t, x) \in H^1(\mathcal{D})$, которые при выполнении начальных и краевых ограничений (1.9) минимизируют функционал состояния F :

$$\begin{aligned} F[v^*, w^*] = \min_{v, w \in H^1(\mathcal{D})} F[v, w] = 0, \quad F = \int_{\mathcal{D}} \varphi dt dx \geq 0, \\ \varphi \triangleq \frac{g^2}{2\rho} + \frac{h^2}{2\kappa}, \quad g \triangleq \partial_x v - \rho \partial_t w_t, \quad h \triangleq \partial_t v - \kappa \partial_x w_x + f. \end{aligned} \quad (2.1)$$

В постановке прямой задачи динамики (1.9), (2.1) неотрицательный функционал F достигает нулевого значения или абсолютного минимума на решении. Квадратичная форма φ имеет размерность линейной плотности энергии, а F — размерность действия. Принадлежность функций v и w к пространству Соболева $H^1(\mathcal{D})$ вытекает из того, что под интегралом в F стоят квадраты производных по t и x от этих переменных.

Ограничимся случаем, когда нормальная сила f берется не в общем виде, а представима в форме (1.1). Относительно функции u решается следующая задача оптимального управления. Пусть функции $v, w \in H^1(\mathcal{D})$, согласно (1.9) и (2.1), минимизируют функционал состояния F для произвольного управления $u \in H^1(\mathcal{T})$, определяющего силу f в соответствии с (1.1). Найти такую допустимую вектор-функцию $u^*(t)$, которая на фиксированном интервале времени \mathcal{T} минимизирует целевой функционал J и выполняет терминальные условия на p и w :

$$\begin{aligned} J[u^*] = \min_{u \in H^1(\mathcal{T})} J[u], \quad J = \frac{\lambda}{2\kappa T} \int_{\mathcal{T}} \dot{u}^2 dt, \\ p(T, x) = p_T(x), \quad w(T, x) = w_T(x). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь J — средняя потенциальная энергия, порождаемая силой $f(t, x)$. Отметим, что последнее терминальное ограничение с помощью интегрирования по x выражается через динамический потенциал v :

$$v(T, x) = v_T(x) = - \int_x^1 p_T(\chi) d\chi.$$

Для упрощения описания системы перейдем без потери общности к безразмерным переменным (в дальнейшем звездочки опускаются):

$$v = \kappa \tau_* v_*, \quad w = \ell w_*, \quad t = \tau_* t_*, \quad x = \ell x_*, \quad \tau_*^2 = \ell^2 \rho / \kappa.$$

Чтобы выполнить после такой замены эквивалентные преобразования, необходимо просто во всех предыдущих выражениях подставить единичные параметры $\ell = \rho = \kappa = 1$.

3. Управляемость отдельных мод колебаний стержня. В сформулированной задаче управления (1.1), (1.9), (2.1), (2.2) присутствуют терминальные ограничения, возможность выполнения которых связана с вопросом управляемости рассматриваемой динамической системы. Некоторые необходимые условия управляемости можно вывести, применяя метод Фурье.

Используем прием разделения переменных для уравнения (1.4) и спроецируем его в гильбертовом пространстве $L^2(\mathcal{X})$ на функции $e_j: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$, которые представляют собой нетривиальные решения соответствующей краевой задачи на собственные значения:

$$e_j''(x) + \omega_j^2 e_j(x) = 0, \quad e_j(0) = 0, \quad e_j'(1) = 0, \quad j \in \mathbb{N}. \quad (3.1)$$

Решение начально-краевой задачи (1.1), (1.9), (2.1) представимо как разложение по базису $\{e_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ в виде:

$$w(t, x) = \sum_{j \in \mathbb{N}} e_j(x) w_j(t), \quad v(t, x) = \sum_{j \in \mathbb{N}} e_j'(x) \int_0^t w_j(\tau) d\tau + r_0(x). \quad (3.2)$$

После интегрирования по частям с учетом (3.2) и того, что сила f из (1.1) кусочно-постоянна по x , получаем счетную систему линейных ОДУ:

$$\begin{aligned} \ddot{w}_j + \omega_j^2 w_j &= \left(e_j(x^-) - e_j(x^+) \right) \dot{u}, \quad t \in T; \\ w_j(0) &= w_j^0, \quad \dot{w}_j(0) = p_j^0, \quad j \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь w_j , w_j^0 и p_j^0 — проекции функции перемещений $w(t, x)$, а также начальных распределений $w_0(x)$ и $p_0(x)$ на $e_j(x)$ соответственно.

Из (3.1) вытекает, что в безразмерном виде собственные частоты и энергетически нормированные функции колебаний консольно закрепленного стержня имеют вид:

$$\omega_j = j\pi - \frac{\pi}{2}, \quad e_j(x) = \frac{\sin \omega_j x}{\sqrt{2} \omega_j}, \quad j \in \mathbb{N}. \quad (3.4)$$

Таким образом, из (3.3) следует, что n -я мода неуправляема, если для произвольного управления u правая часть соответствующего уравнения из (3.3) равна нулю, а значит, согласно (3.4):

$$\begin{aligned} \sin(\omega_n x^-) - \sin(\omega_n x^+) &= \sin(\alpha_n - \beta_n) - \sin(\alpha_n + \beta_n) = 0 \Rightarrow \\ -2 \cos \alpha_n \sin \beta_n &= 0 \Rightarrow \\ k \in \mathbb{N} : \alpha_n &= k\pi - \pi / 2, k < n \vee \beta_n = k\pi, 4k < 2n - 1. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Здесь введена фаза волны α_n собственной функции e_n в центральной точке ПА и сдвиг фазы β_n между центром и правым краем x^+ ПА:

$$\alpha_n = \omega_j \frac{x^+ + x^-}{2}, \quad \beta_n = \omega_j \frac{x^+ - x^-}{2}. \quad (3.6)$$

Из (3.5) и (3.6) вытекает, что n -я мода неуправляема, если либо собственная функция e_n достигает экстремума в центре ПА, либо длина ПА кратна длине волны функции e_n .

Если для фиксированных геометрических параметров x^\pm несколько мод такие, что для каждой из них выполняется одно из условий (3.5), все они принадлежат неуправляемой группе мод. Так, например, если для m -й моды $\beta_n = \pi$, то неуправляемыми будут и все моды $n > m$, для которых число $2n - 1$ кратно $2m - 1$.

4. Решение краевой задачи. Допустим, что геометрические параметры ПА выбраны из класса рациональных чисел. Без потери общности можно положить, что

$$x^\pm = \xi n^\pm, \quad \xi = 1 / N, \quad n^+, N \in \mathbb{N}, \quad n^- \in \mathbb{Z}_+, \quad n^- < n^+ \leq N.$$

Здесь N выбирается так, что либо x^+ — несократимая дробь, либо координата x^- не равна нулю и несократима.

Пусть для некоторой пары x^\pm каждая мода колебаний в отдельности управляема. Выполнение этого необходимого условия не гарантирует полной управляемости системы консольного стержня с ПА. Однако для рациональных параметров x^\pm далее предлагается алгоритм построения точного решения задачи оптимального управления (1.1), (1.9), (2.1), (2.2), который позволяет ответить на вопрос, в каком случае и за какое время T система может быть приведена из произвольного допустимого начального состояния в произвольное терминальное.

Для нахождения оптимального движения функции состояния (v, w) берутся в виде линейной комбинации бегущих волн Даламбера. Сформируем конечную сетку из характеристик на пространственно-временной области \mathcal{D} , с использованием которой, как будет показано ниже, удастся свести рассматриваемую прямую задачу динамики в УЧП к линейной алгебраической системе, а обратную задачу управления — к линейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с постоянными коэффициентами.

Допустим, что в безразмерных переменных время управления T не кратно ξ , и представим его в виде:

$$T = M\xi + \tau_0, \quad \tau_1 = \xi - \tau_0 \geq 0, \quad M \in \mathbb{Z}_+.$$

Особый случай $\tau_0 = 0$ рассматривается либо с помощью предельного перехода, либо с использованием специального упрощенного алгоритма, как показано в работе [12].

Для построения сетки на области \mathcal{D} (см. рис. 2) разобьем временной интервал T на $2M + 1$ подынтервалов \mathcal{T}_m , а пространственный интервал \mathcal{X} — на N подынтервалов \mathcal{X}_j так, что

$$\mathcal{T}_m = (t_m - t_{m+1}), \quad m \in \mathcal{M} = \overline{0, 2M}, \quad t_m = \begin{cases} j\xi, & m = 2j, \\ j\xi + \tau_0, & m = 2j + 1, \end{cases} \quad m \in \mathcal{M}^* = \overline{0, 2M + 1}, \quad (4.1)$$

$$\mathcal{X}_n = (x_{n-1} - x_n), \quad n \in \mathcal{N} = \overline{1, N}, \quad x_n = n\xi, \quad n \in \mathcal{N} = \overline{0, N},$$

На рис. 2 приведен пример сетки с выбранными параметрами $M=9, N=4, \tau_0=1/12$, где отрезки $x = x_n$ изображены горизонтально, а отрезки $t = t_n$ — вертикально пунктирными линиями.

Каждому интервалу \mathcal{X}_n из (4.1) соответствует подобласть $\mathcal{D}_n = T \times \mathcal{X}_n$ области \mathcal{D} и три одномерные функции:

$$\begin{aligned} w_n^+ : (x_n, T + x_{n+1}) &\rightarrow \mathbb{R}, \quad w_n^- : (-x_{n+1}, T - x_n) \rightarrow \mathbb{R}, \\ y_n : (0, T) &\rightarrow \mathbb{R}, \quad y_n(t) = \frac{1}{\xi} \int_{\mathcal{X}_j} \int_0^t f(\tau, x) d\tau dx. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Здесь, согласно (1.1), функция y_n либо тождественно равна нулю при $\mathcal{X}_n \cap \mathcal{U} = \emptyset$, либо $y_n = u$ при $\mathcal{X}_n \subset \mathcal{U}$.

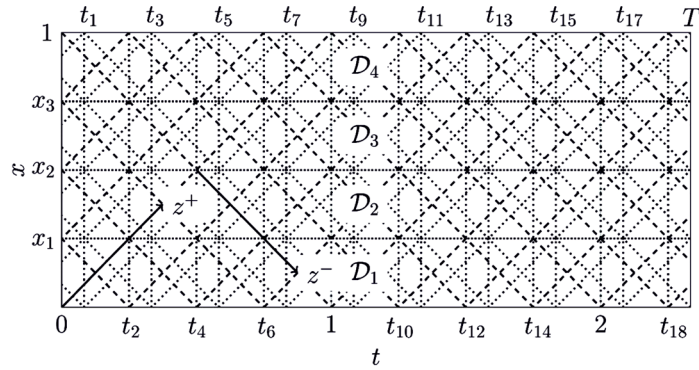


Рис. 2. Сетка на пространственно-временной области \mathcal{D} для параметров системы: $x^- = 0, \lambda = 1/4, T = 7/3$.

На каждой подобласти \mathcal{D}_n переменные v и w представляются в виде:

$$\begin{cases} v(t, x) = w_n^+(z^+) - w_n^-(z^-) + y_n(t), \\ w(t, x) = w_n^+(z^+) + w_n^-(z^-), \end{cases} \quad (t, x) \in \mathcal{D}_n, n \in \mathcal{N}, \quad (4.3)$$

где введены новые координаты (z^+, z^-) на двумерной области \mathcal{D} :

$$z^\pm = t \pm x, \quad t = \frac{z^+ + z^-}{2}, \quad x = \frac{z^+ - z^-}{2}. \quad (4.4)$$

Новые координатные оси связаны с двумя характеристиками решения (сплошные наклонные линии на рис. 2, для наглядности ось z^- сдвинута вдоль оси z^+). Как видно из (4.4), новые координаты связаны с (t, x) биективными линейными преобразованиями (поворотом вокруг точки $(0,0)$ и растяжением осей). После непосредственной подстановки (4.3) в функционал состояния F получается, что $F=0$, так как $\partial_x v \equiv \partial_t w$ и $\partial_t v \equiv \partial_x w - f$.

Два семейства характеристик представляют собой прямолинейные сегменты на \mathcal{D} , на которых не меняются значения функций $w_n^\pm(t \pm x)$. Показанные на рис. 2 наклонные ребра формируемой сетки — это характеристики, определяемые в новых координатах как

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_k^\pm &= \{(z^+, z^-) \in \mathcal{D} : z^\pm = z_k^\pm\}, \quad k \in \overline{1, 2(M+N)}, \\ \begin{cases} z_k^+ = j\xi, & z_k^- = j\xi - 1, & k = 2j, \\ z_k^+ = j\xi + \tau_0, & z_k^- = j\xi - 1 + \tau_0, & k = 2j + 1, \end{cases} & j \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned}$$

Пространственные и временные ребра сетки удобнее задаются в старых координатах:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_m^t &= \{(t, x) \in \mathcal{D} : t = t_m\}, \quad m \in \mathcal{M}^*, \\ \mathcal{S}_n^x &= \{(t, x) \in \mathcal{D} : x = x_n\}, \quad n \in \mathcal{N}^*. \end{aligned}$$

Из требования интегрируемости обобщенных первых производных от переменных состояния стержня (v, w) и их начальных и терминальных распределений следуют как непрерывность функций бегущих волн w_n^\pm и управления u , так и выполнение условий непрерывной стыковки пары (v, w) на сегментах \mathcal{S}_n^x , где $n \in \mathcal{N}_* = \overline{1, N-1}$.

Для сшивки v и w на этих ребрах понадобится ввести на каждой подобласти \mathcal{D}_n следующие вспомогательные функции:

$$\begin{aligned} w_{n,m}^+ : \mathcal{Z}_j &\rightarrow \mathbb{R} : w_{n,m}^+(z) = w_n^+(z + z_{m+2n-2}^+), & m \in \mathcal{M}^{**}, \\ w_{n,m}^- : \mathcal{Z}_j &\rightarrow \mathbb{R} : w_{n,m}^-(z) = w_n^-(z + z_{m+2N-2n-2}^-), & m \in \mathcal{M}^{**}, \\ y_{n,m} : \mathcal{Z}_j &\rightarrow \mathbb{R} : y_{n,m}(z) = y_n(z + t_m), & m \in \mathcal{M}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где

$$\mathcal{M}^{**} = \{1, 2M + 2\}, \quad \mathcal{Z}_j = (0, \tau_j), \quad j = m \bmod 2.$$

Согласно (4.3), комбинация функций $w_{n,i}^+$, $w_{n,j}^-$ и $y_{n,k}$ с правильным набором индексов i, j, k, n однозначно определяет переменные состояния v, w на каждом элементе сетки.

Так как $v, w \in H^1(\mathcal{D})$, из линейности соотношений (4.3) следуют определенные свойства одномерных функций $w_{n,m}^\pm \in H^1(\mathcal{Z}_j)$, $y_{n,m} \in H^1(\mathcal{Z}_j)$ из (4.5). В силу леммы Соболева [20] эти функции должны быть непрерывны и непрерывно продолжаемы на замыкание своей области определения: $w_{n,m}^\pm \in C^0(\bar{\mathcal{Z}}_j)$, $y_{n,m} \in C^0(\bar{\mathcal{Z}}_j)$, где $j = m \bmod 2$.

Для построения непрерывного решения краевой задачи на замыкании области $\bar{\mathcal{D}}$ необходимо выполнить терминальные, начальные, краевые и межэлементные условия соответственно на сегментах $\mathcal{S}_0^t, \mathcal{S}_{2M+1}^t, \mathcal{S}_n^x, n \in \mathcal{N}^*$. Учтем (1.9), (2.2), (4.3), (4.5) и начальные ограничения $y_{j,0}(0) = 0$, следующие из (4.2). Тогда терминальные условия из (2.2), заданные на \mathcal{S}_0^t , для каждой $\mathcal{D}_n, n \in \mathcal{N}$, после определенных преобразований представляются в форме

$$\begin{cases} w_{n,j}^+(z) = \frac{1}{2} w_T(z + z_{j+2M+2n-2}^+) + \frac{1}{2} v_T(z + z_{j+2M+2n-2}^+), \\ w_{n,j}^-(z) = \frac{1}{2} w_T(z_{j+2M+2N-2n}^- - z) - \frac{1}{2} v_T(z_{j+2M+2N-2n}^- - z), \\ j = 2M + 1, 2M + 2, \quad n \in \mathcal{N}. \end{cases} \quad (4.6)$$

Начальные условия, заданные в (1.9), для той же \mathcal{D}_n примут вид:

$$\begin{cases} w_{n,j}^+(z) = \frac{1}{2} w_0(z + z_{j+2n-2}^+) + \frac{1}{2} v_0(z + z_{j+2n-2}^+), \\ w_{n,j}^-(z) = \frac{1}{2} w_0(z_{j+2N-2n}^- - z) - \frac{1}{2} v_0(z_{j+2N-2n}^- - z), \\ j = 0, 1, \quad n \in \mathcal{N}. \end{cases} \quad (4.7)$$

Условия на обоих краях стержня из (1.9) для каждого ребра сетки, лежащего на граничных сегментах \mathcal{S}_0^x и \mathcal{S}_N^x , переписываются как

$$\begin{cases} w_{1,m}^+(z) + w_{1,m+2}^-(z) = 0, \\ w_{N,m+2}^+(z) - w_{N,m}^-(z) + y_{N,m}(z) = 0, \end{cases} \quad m \in \mathcal{M}. \quad (4.8)$$

Межэлементные условия для функций v и w на внутренних сегментах $\mathcal{S}_n^x, n \in \mathcal{N}_*$, описываются следующим образом:

$$\begin{cases} w_{n,m+2}^+(z) + w_{n,m}^-(z) = w_{n+1,m}^+(z) + w_{n+1,m+2}^-(z), \\ w_{n,m+2}^+(z) - w_{n,m}^-(z) + y_{n,m}(z) = \\ = w_{n+1,m}^+(z) - w_{n+1,m+2}^-(z) + y_{n+1,m}(z), \\ m \in \mathcal{M}, \quad n \in \mathcal{N}_*. \end{cases} \quad (4.9)$$

Число уравнений $N_e = 4NM + 10N$ в линейной алгебраической системе (4.6)–(4.9) равно сумме числа неизвестных функций $w_{n,m}^\pm$ и числа терминальных условий $4N, n \in \mathcal{N}, m \in \mathcal{M}$. В этой системе аргумент z пробегает значения от 0 до $\tau_j, j = 0, 1$, в зависимости от четности индекса m . Чтобы разрешить начальные, краевые и межэлементные условия, достаточно использовать функций $w_{n,m}^\pm$, но для удовлетворения терминальных ограничений (4.6) потребуются привлечь, например, независимые функции $y_{n,m}^+$. Эти функции определяются через функцию управления, и их число должно быть не меньше $4N$, что обеспечивается выполнени-

ем неравенства $M \geq 2N$ ($T \geq T_* = 2$). Если время управления больше критического, именно разрешимость уравнений (4.7)–(4.9) доказывает управляемость системы стержень–ПА.

Чтобы подтвердить разрешимость начально-краевых и межэлементных условий (4.7)–(4.9) исключительно относительно функций бегущих волн, можно предложить следующий алгоритм.

Шаг 1. Начальные условия (4.7) разрешены: для каждого n относительно четырех переменных $w_{n,j}^\pm$, $j = 0, 1$.

Шаг $m+2$. Индекс m пробегает значения от 0 до $M-1$. Разрешаем соответствующие краевые и межэлементные условия. Функции $w_{j,m}^\pm$, входящие в эту подсистему, уже выражены на предыдущих шагах через начальные распределения v_0 , w_0 и функций u_k , где $k = \overline{0, m-1}$:

– пара краевых условий из (4.8) решается для текущего индекса m относительно $w_{N,m+2}^+$ и $w_{0,m+2}^-$;

– наряду с этим $2(N-1)$ межэлементных уравнений из (4.9) попарно удовлетворяются с использованием $w_{n,m+2}^+$ и $w_{n+1,m+2}^-$, где $n = \overline{N_*}$.

5. Сведение задачи управления к одномерной вариационной. Введем вспомогательные функции управления:

$$u_m : \mathcal{Z}_j \rightarrow \mathbb{R} : u_m(z) = u(z + t_m), \quad m \in \mathcal{M}, \quad j = m \bmod 2. \quad (5.1)$$

Из (4.2), (4.5) следует, что $y_{n,m}(z) = u_m(z)$ для $n^- < n \leq n^+$ и $y_{n,m}(z) = 0$ для $n \leq n^-$ или $n > n^+$, где $z \in \mathcal{Z}_j$.

Как обсуждалось в предыдущем разделе, чтобы выполнить все терминальные условия (4.6) в общем случае необходимо $4N$ независимых функций из (5.1). Это, в свою очередь, приводит к тому, что требуется время управления не меньше критического $T \geq T_* = 2$, чтобы существовало такое количество функций u_m .

Допустим, что система (4.6)–(4.9) разрешима относительно функций бегущих волн $w_{n,m}^\pm$ при $n \in \mathcal{N}$ и $m \in \mathcal{M}^{**}$, а также части функций управления $u_i(z)$ из (5.1), $k = \overline{2M-4N, 2M}$. Оставшиеся независимыми функции $u_j(z)$ соберем в два вектора:

$$\mathbf{u}_0 = (u_{2k})_{k=0}^{M-2N}, \quad \mathbf{u}_1 = (u_{2k-1})_{k=1}^{M-2N}.$$

Решение линейной системы (4.6)–(4.9) в этом случае зависит от начальных и терминальных распределений $v_0(x)$, $w_0(x)$, $v_T(x)$, $w_T(x)$ на отрезке $x \in \overline{\mathcal{X}}$ и двух вектор-функций:

$$\mathbf{u}_j : \overline{\mathcal{Z}}_j \rightarrow \mathbb{R}^{N_j}, \quad N_1 = N_0 - 1 = M - 2N, \quad j = 0, 1.$$

Для того чтобы динамическая и кинематическая функции v , w были непрерывны, на сегментах \mathcal{S}_m^t , где $m \in \mathcal{M}$, должны быть согласованы узловые значения управления:

$$\begin{aligned} u_{2k+1}(0) &= u_{2k}(\tau_0), \quad k = \overline{0, M-2N}, \\ u_{2k}(0) &= u_{2k-1}(\tau_0), \quad k = \overline{1, M-2N}, \quad u_0(0) = 0. \end{aligned}$$

Можно представить эти соотношения в векторном виде:

$$\mathbf{u}_0(0) = \mathbf{B}_0 \mathbf{u}_1(\tau_1), \quad \mathbf{u}_0(\tau_0) = \mathbf{B}_1 \mathbf{u}_1(0) + \mathbf{b}. \quad (5.2)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_j &\in \mathbb{R}^{N_0 \times N_1}, \quad j = 0, 1, \quad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{N_0}, \\ \mathbf{B}_0 &= [0 \ \mathbf{E}_{N_1}]^T, \quad \mathbf{B}_1 = [\mathbf{E}_{N_1} \ \mathbf{b}]^T, \end{aligned}$$

где \mathbf{E}_{N_1} — единичная матрица размером N_1 . Значения векторов $\hat{\mathbf{b}}$, \mathbf{b} зависят от параметров сетки, а \mathbf{b} — еще и от значений начальных и терминальных функций v_0 , w_0 , v_T , w_T в узловых точках сетки.

Рассмотрим подробнее функционал цены J из (2.2) с учетом введенных функций управления. В силу своей аддитивности безразмерный функционал J записывается через функции u_m в форме:

$$J = \frac{\lambda}{2T} \sum_{j=0}^1 \sum_{k=j}^M \int_{\mathcal{Z}_j} (u'_{2k-j}(z))^2 dz.$$

Так как зависимые функции управления u_m выражаются аффинно через независимые, квадратичный функционал J переписывается в терминах вектор-функций управления \mathbf{u}_j :

$$J = \frac{\lambda}{2T} \sum_{j=0}^1 \int_{\mathcal{Z}_j} L_j dz, \quad L_j(z) = |\mathbf{A}_j \mathbf{u}'_j(z) + \mathbf{a}_j(z)|^2, \quad (5.3)$$

где $\mathbf{A}_j(z) \in \mathbb{R}^{(2N+N_j) \times N_j}$ — постоянные матрицы, а значения вектор-функций $\mathbf{a}_j(z) \in \mathbb{R}^{2N+N_j}$ определяются через начальные и терминальные состояния стержня. Отметим, что L_j как квадратичные формы векторов $\mathbf{u}'_j(z)$ положительно определены. Это напрямую следует из того, что каждую форму L_j можно представить как сумму положительной и неотрицательной форм:

$$L_j(z) = \mathbf{u}'_j{}^T(z) \mathbf{u}'_j(z) + |\tilde{\mathbf{A}}_j \mathbf{u}'_j(z) + \tilde{\mathbf{a}}_j(z)|^2, \quad \tilde{\mathbf{A}}_j \in \mathbb{R}^{2N \times N_j}, \quad \tilde{\mathbf{a}}_j \in \mathbb{R}^{2N}.$$

В итоге задача оптимального управления сводится к классической одномерной краевой задаче вариационного исчисления относительно векторзначных функций $\mathbf{u}_j, j=0, 1$. Нужно найти такие управления $\mathbf{u}_j^*(z)$ для $z \in \mathcal{Z}_j$, которые минимизируют квадратичный функционал:

$$J[\mathbf{u}_0^*, \mathbf{u}_1^*] = \min_{\mathbf{u}_j \in H^1(\mathcal{Z}_j, \mathbb{R}^{N_j}), j=0,1} J[\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1] \quad (5.4)$$

при соблюдении краевых ограничений (5.2).

Для определения необходимых условий экстремальности решения вариационной задачи (5.2), (5.4) введем вектор-функции, сопряженные с \mathbf{u}_j , согласно

$$\mathbf{p}_j = \frac{\partial L_j}{\partial \mathbf{u}'_j} = 2\mathbf{A}_j^T \mathbf{A}_j \mathbf{u}'_j + 2\mathbf{A}_j^T \mathbf{a}_j.$$

С учетом того, что лагранжианы L_j , введенные в (5.3), включают в себя только первую производную от \mathbf{u}_j , два векторных уравнения Эйлера имеют вид:

$$\mathbf{A}_j^T \mathbf{A}_j \mathbf{u}'_j(z) + \mathbf{A}_j^T \mathbf{a}'_j(z) = 0, \quad z \in \mathcal{Z}_j, \quad j = 0, 1. \quad (5.5)$$

Выпишем условие трансверсальности вариационной задачи:

$$\sum_{j=0}^1 \left(\mathbf{p}_j^T(0) \delta \mathbf{u}_j(0) - \mathbf{p}_j^T(\tau_j) \delta \mathbf{u}_j(\tau_j) \right) = 0, \quad (5.6)$$

где $\delta \mathbf{u}_j(0)$ и $\delta \mathbf{u}_j(\tau_j)$ — вариации вектор-функций \mathbf{u}_j на границе области определения \mathcal{Z}_j . С учетом существенных краевых условий (5.2) из (5.6) выводятся естественные условия, накладываемые на сопряженный функции \mathbf{p}_j :

$$\left(\mathbf{p}_0^T(0) \mathbf{B}_0 - \mathbf{p}_1^T(\tau_1) \right) \delta \mathbf{u}_1(\tau_1) - \left(\mathbf{p}_0^T(\tau_0) \mathbf{B}_1 - \mathbf{p}_1^T(0) \right) \delta \mathbf{u}_1(0) = 0. \quad (5.7)$$

Окончательно из независимости вариаций конечных значений \mathbf{u}_1 в (5.7) получаем условия трансверсальности:

$$\mathbf{p}_1(\tau_1) = \mathbf{B}_0^T \mathbf{p}_0(0), \quad \mathbf{p}_1(0) = \mathbf{B}_1^T \mathbf{p}_0(\tau_0). \quad (5.8)$$

Из положительной определенности матриц $\mathbf{A}_j^T \mathbf{A}_j$ решение ОДУ (5.5) выводится напрямую в квадратурах:

$$\mathbf{u}_j(z) = -\int_0^z (\mathbf{A}_j^T \mathbf{A}_j)^{-1} \mathbf{A}_j^T \mathbf{a}_j(\zeta) d\zeta + \mathbf{c}_j^1 z + \mathbf{c}_j^0, \quad (5.9)$$

$$\mathbf{c}_j^i \in \mathbb{R}^{N_j}, \quad z \in \mathcal{Z}_j, \quad i, j = 0, 1.$$

Оптимальные константы \mathbf{c}_j^i находятся из $2N_0 + 2N_1$ условий (5.2), (5.8).

Важно отметить, что векторы управления $\mathbf{u}_j^*(z)$ из (5.9), удовлетворяющие этим условиям, доставляют абсолютный минимум целевому функционалу J . Это напрямую следует из квадратичности и положительной определенности J .

6. Пример оптимизации движения. Приведем пример оптимального гашения продольных колебаний ($v_T = w_T = 0$) консольно закрепленного стержня для заданной длины ПА $\lambda = 1/4$. Допускаются лишь четыре варианта расположения ПА: $x^- = 0, \xi, 2\xi, 3\xi$, где $\xi = 1/N$, $N = 4$. В качестве начальных распределений зададим следующие тригонометрические функции:

$$v_0(x) = \sin 4 - \sin 4x, \quad w_0(x) = \sin 4x. \quad (6.1)$$

Для демонстрации характера оптимальных перемещений выберем случай, когда ПА находится ближе к заделке ($x^- = 0$). Зафиксируем время гашения колебаний $T = 7/3$, т.е. $M = 9$, $\tau_0 = 1/12$. На рис. 3 показано оптимальное управление u как функция времени t . Как видно из графика, управление непрерывно и, согласно построению (1.1), равно нулю в начальный момент $u(0) = 0$. На начальном этапе эта функция положительна, а ближе к концу временного интервала меняет знак.

Оптимальная пьезоэлектрическая сила $f(t, 1/8)$, возбуждаемая ПА во время процесса, приведена на рис. 4. Судя по этому графику, в моменты времени вида $t = j\xi$ и $t = k\xi + \tau_0$, где $0 < j, k \leq 9$ — целые числа, сила может скачком менять свое значение.

На рис. 5 показано соответствующее выбранным параметрам оптимальное пространственно-временное распределение динамического потенциала $v(t, x)$. Это распределение показывает, что потенциал представляет собой непрерывную функцию, строго удовлетворено краевое ограничение $v(t, 1) = 0$, в конце процесса выполняется однородное терминальное условие

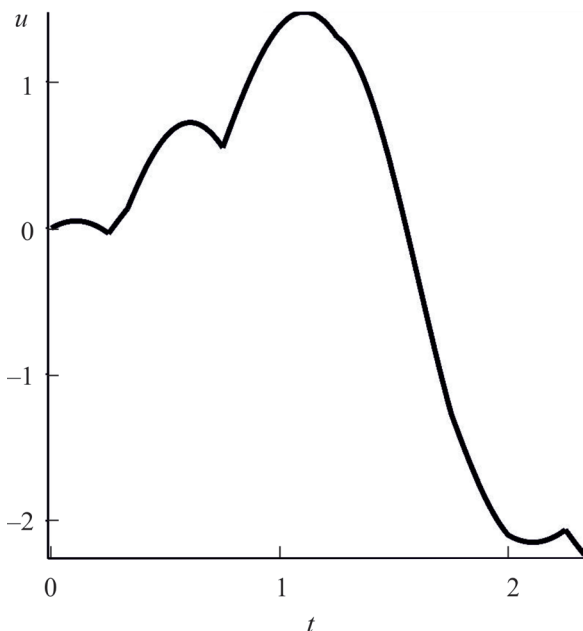


Рис. 3. Оптимальное управление $u(t)$.

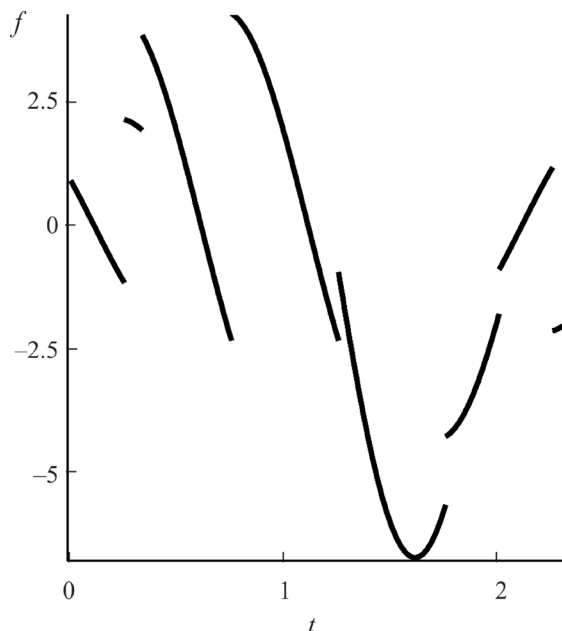


Рис. 4. Создаваемая пьезоэлектрическим актюатором оптимальная сила $f(t, \lambda/2) = \dot{u}(t)$.

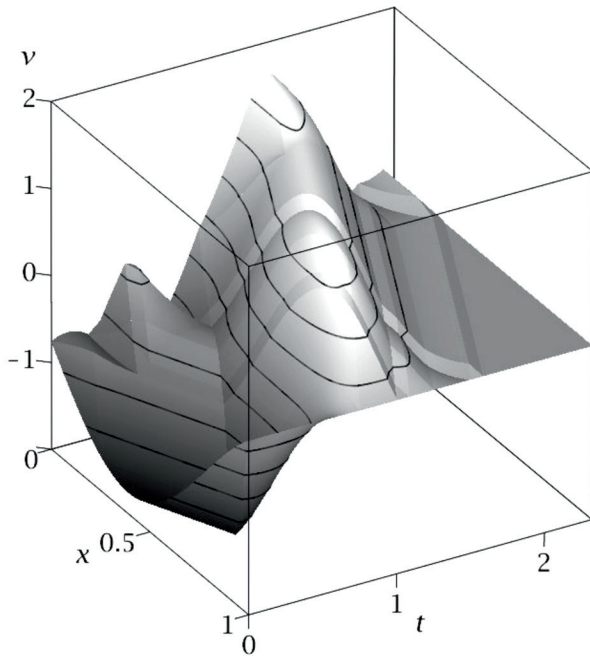


Рис. 5. Оптимальный динамический потенциал стержня $v(t, x)$.

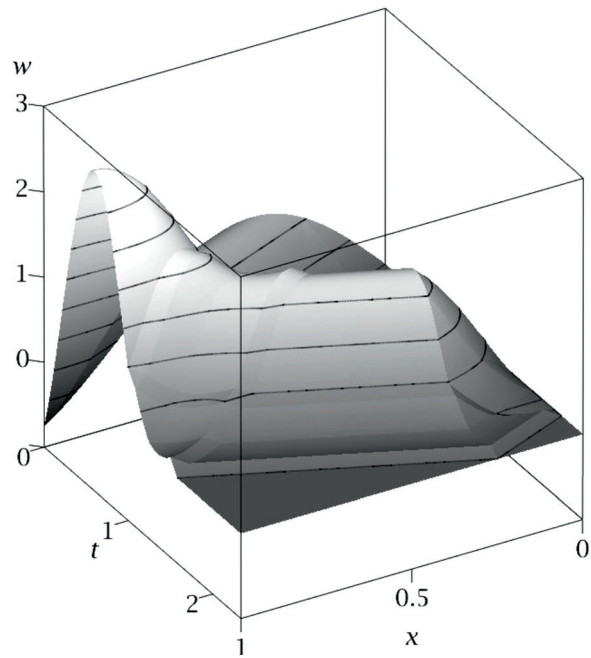


Рис. 6. Оптимальные перемещения точек стержня $w(t, x)$.

$v(T, x) = 0$. Максимальное значение динамическая переменная v принимает в точке закрепления $x = 0$.

На рис. 6 изображены оптимальные продольные перемещения w точек деформируемого стержня в зависимости от координат (t, x) . Функция $w(t, x)$ непрерывна, в заделанном конце стержня перемещений нет ($w(t, 0) = 0$), а к моменту окончания управляемого процесса $t = T$ стержень приходит в недеформированное состояние с нулевой скоростью. Максимум перемещений достигается на свободном конце $x = 1$.

Посмотрим, как изменяется целевой функционал J в зависимости от времени управления T и места расположения ПА на стержне. На рис. 7 различными маркерами показаны оптимальные значения функционала J для четырех положений левого конца ПА: $x^- = j\xi$, $j = 0, 1, 2, 3$. Зависимости $J(T)$ для различных j помечены соответствующими номерами. Начальные условия такие же, как в (6.1). Время меняется от минимально допустимого $T^* = 2$ до $T = 3$. Для каждого j функция $J(T)$ строго монотонно убывающая. Эта функция терпит разрывы первого рода для значений T , кратных $\xi = \lambda = 1/4$, причем $J(T) \text{ имеет непрерывный предел справа } J(m\xi - 0) > J(m\xi) = J(m\xi + 0)$.

Наименьшие значения нормы управляющей силы достигаются, если расположить ПА ближе к жесткой заделке стержня ($j = 0$). При этом для критического $T = 2$ и выбранных начальных условий подсчитано, что $J(2) = 1.53$. Если поместить ПА у свободного края ($j = 3$), требуемые управляющие силы для гашения колебаний наибольшие по квадратичной норме. Для такой конфигурации критическое значение функционала равно $J(2) = 23.15$. Далее по убыванию

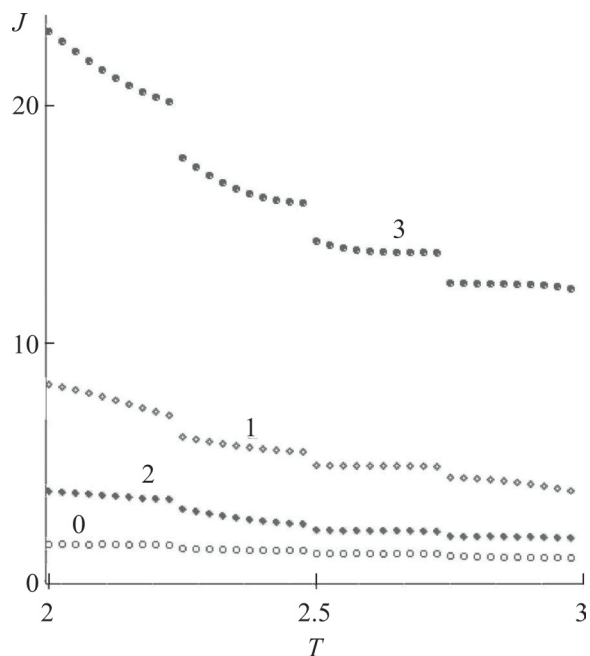


Рис. 7. Оптимальные значения целевого функционала J в зависимости от времени управления T для различных расположений ПА при $x^- = j/4$, где $j = 0, 1, 2, 3$.

нормы идет случай $x^- = 1/4$ ($j=1$), для которого $J(2) = 8.28$. Если левый конец ПА находится в середине стержня ($x^- = 1/2$, т.е. $j=2$), максимум функционала принимает значение $J(2) = 3.77$.

Заключение. Рассмотрены продольные перемещения тонкого однородного упругого стержня с расположенным на нем пьезоэлектрическим актюатором. Механическое состояние стержня описывается кинематическим и динамическим полями, заданными в энергетическом пространстве. Для фиксированного интервала времени дана обобщенная формулировка задачи оптимального управления с помощью дискретно распределенных в пространстве продольных сил. Минимизируется квадрат среднего по времени значения управляющей пьезоэлектрической силы при условии приведения стержня в предписанное состояние. Определены геометрические параметры ПА, при которых приведение стержня в произвольное состояние невозможно ни за какое время. Предложен алгоритм построения и оптимизации движения с использованием представления решения в виде комбинации бегущих волн. Исследована зависимость оптимальных значений квадратичной нормы пьезоэлектрической силы от времени управления и положения ПА.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lions J.L. Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations. N.Y.: Springer-Verlag, 1971. 400 p.
2. Бутковский А.Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1965. 474 с.
3. Романов И.В., Шамаев А.С. О задаче граничного управления для системы, описываемой двумерным волновым уравнением // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 1. С. 109–116.
4. Черноусько Ф.Л., Ананьевский И.М., Решмин С.А. Методы управления нелинейными механическими системами. М.: Физматлит, 2006. 328 с.
5. Chen G. Control and Stabilization for the Wave Equation in a Bounded Domain. II // SIAM J. Control Optim. 1981. V. 19. № 1. P. 114–122.
6. Гавриков А.А., Костин Г.В. Изгибные колебания упругого стержня, управляемого пьезоэлектрическими силами // ПММ. 2023. Т. 87. № 5. С. 801–819.
7. IEEE Standard on Piezoelectricity // ANSI/IEEE Std 176-1987. 1988. <https://doi.org/10.1109/IEEESTD.1988.79638>
8. Kucuk I., Sadek I., Yilmaz Y. Optimal Control of a Distributed Parameter System with Applications to Beam Vibrations Using Piezoelectric Actuators // J. Franklin Inst. 2014. V. 351. № 2. P. 656–666.
9. Kostin G.V., Saurin V.V. Dynamics of Solid Structures. Methods Using Integrodifferential Relations. Berlin: De Gruyter, 2018.
10. Kostin G., Gavrikov A. Controllability and Optimal Control Design for an Elastic Rod Actuated by Piezoelements // IFAC-PapersOnLine. 2022. V. 55. № 16. P. 350–355. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2022.09.049>
11. Гавриков А.А., Костин Г.В. Оптимизация продольных движений упругого стержня с помощью периодически распределенных пьезоэлектрических сил // Изв. РАН. ТиСУ. 2023. № 6. С. 93–109.
12. Kostin G., Gavrikov A. Modeling and Optimal Control of Longitudinal Motions for an Elastic Rod with Distributed Forces // ArXiv. 2022. arXiv:2206.06139 5. P. 1–11. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2206.06139>
13. Gavrikov A., Kostin G. Optimal LQR Control for Longitudinal Vibrations of an Elastic Rod Actuated by Distributed and Boundary Forces // Mechanisms and Machine Science. V. 125. Berlin: Springer, 2023. P. 285–295. https://doi.org/10.1007/978-3-031-15758-5_28
14. Ho L.F. Exact Controllability of the One-dimensional Wave Equation with Locally Distributed Control // SIAM J Control Optim. 1990. V. 28. № 3. P. 733–748.
15. Bruant I., Coffignal G., Lene F., Verge M. A Methodology for Determination of Piezoelectric Actuator and Sensor Location on Beam Structures // J. Sound and Vibration. 2001. V. 243. № 5. P. 861–882. <https://doi.org/10.1006/jsvi.2000.3448>
16. Gupta V., Sharma M., Thakur N. Optimization Criteria for Optimal Placement of Piezoelectric Sensors and Actuators on a Smart Structure: A Technical Review // J. Intelligent Material Systems and Structures. 2010. V. 21. № 12. P. 1227–1243. <https://doi.org/10.1177/1045389X10381659>
17. Botta F., Rossi A., Belfiore N.P. A Novel Method to Fully Suppress Single and Bi-modal Excitations Due to the Support Vibration by Means of Piezoelectric Actuators // J. Sound and Vibration. 2021. V. 510. № 13. P. 116260. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2021.116260>
18. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 735 с.
19. Михлин С.Г. Курс математической физики. М.: Наука, 1968. 576 с.
20. Иосида К. Функциональный анализ. М.: Мир, 1968. 624 с.