ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2024, № 1, С. 3–16

УДК 62-50

О ЧАСТИЧНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ВЕРОЯТНОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ (ЗАПАЗДЫВАНИЕМ)

© 2024 г. В.И. Воротников[a, *], Ю.Г. Мартышенко[b, **]

[a]*Сочинский институт РУДН, Сочи, Россия*

[b]*Российский государственный университет нефти и газа, Москва, Россия*

**e-mail: vorotnikov-vi@rambler.ru*

***e-mail: j-mart@mail.ru*

Поступила в редакцию 12.09.2022 г.

После доработки 07.08.2023 г.

Принята к публикации 02.10.2023 г.

Рассматривается система нелинейных функционально-дифференциальных уравнений с последействием (запаздыванием), подверженных воздействию случайных процессов “белого” шума. Предполагается, что система допускает “частичное” (по некоторой части переменных состояния) нулевое положение равновесия. Ставится задача анализа устойчивости по вероятности данного положения равновесия, причем устойчивость рассматривается не по всем, а только по отношению к части определяющих это положение равновесия переменных. Для решения применяется стохастический вариант метода функционалов Ляпунова—Красовского при соответствующей конкретизации требований к функционалам. В целях расширения возможностей используемого метода также предлагается проводить корректировку области функционального пространства, в которой строятся вспомогательные функционалы Ляпунова—Красовского. Получены условия частичной устойчивости указанного вида. Приводятся примеры, показывающие особенности предложенного подхода.

Ключевые слова: система нелинейных стохастических функционально-дифференциальных уравнений в форме Ито, частичная устойчивость по вероятности, метод функционалов Ляпунова – Красовского

DOI: 10.31857/S0002338824010011, **EDN:** JBZAPQ

ON PARTIAL STABILITY IN PROBABILITY FOR NONLINEAR STOCHASTIC FUNCTIONAL DIFFERENTIAL SYSTEMS WITH AFTEREFFECT (DELAY)

© 2024 V.I. Vorotnikov [a, *], Yu.G. Martyshenko[b, **]

[a] *RUDN University, Sochi Institute, Sochi, Russia*

[b] *Gubkin University Oil and Gas, Moscow, Russia*

** e-mail: vorotnikov-vi@rambler.ru*

*** e-mail: j-mart@mail.ru*

A system of nonlinear functional-differential equations with aftereffect (delay) subjected to random processes of “white” noise is considered. It is assumed that the system admits a “partial” (with respect to some part of the state variables) zero equilibrium position. The problem of stability in probability of a given equilibrium position is posed, and stability is considered not in all, but with respect to a part of the variables that determine this equilibrium position. For the solution of this problem, a stochastic version of the method of Lyapunov—Krasovskii functionals is used with the appropriated specification of the requirements for the functionals. In order to expend the capabilities of the method used, it is also proposed to correct the domain of the functional space in which auxiliary Lyapunov—Krasovskii functionals are constructed. Conditions for partial stability of this type are obtained. Examples are given that show the features of the proposed approach.

Keywords: stochastic functional differential system in Ito form, partial stability in probability, method of Lyapunov—Krasovskii functionals

Введение. Интерес к системам стохастических функционально-дифференциальных уравнений с последействием (запаздыванием) возникает тогда, когда в процессе математического моделирования необходимо учитывать одновременно эффекты эредитарности (наследственности) и воздействия различных случайных факторов. В управляемых стохастических системах такая ситуация возникает, в частности, в случае фактически имеющего место или преднамеренного введения запаздывания в цепи обратной связи.

Задачи устойчивости относятся к практически важным задачам качественного анализа указанного класса систем. При этом в отечественной и зарубежной литературе главным образом анализируется задача устойчивости по отношению ко всем переменным нулевого положения равновесия; заменой переменных к такой задаче сводится задача устойчивости по всем переменным любого решения исходной системы. Основным методом исследования является прямой метод Ляпунова. Один из конструктивных вариантов этого метода разработан в [1—4]: стохастический вариант метода функционалов Ляпунова—Красовского. Анализируется два основных вида устойчивости: по вероятности (стохастическая устойчивость) и устойчивость в среднеквадратическом. В основе указанного метода лежат функциональная трактовка решений рассматриваемого класса систем, а также возможность представления используемых функционалов Ляпунова—Красовского в виде функции конечного числа переменных, для которой допустимо применение классической формулы Ито. Дальнейшее развитие метода возможно [5—8] с помощью функционалов более общего вида и разработки функционального аналога формулы Ито [9].

Для многих современных исследований наряду с задачами устойчивости по всем переменным важную роль также играют более общие задачи *частичной устойчивости*, изучение которых в значительной степени инициировала статья В.В. Румянцева [10] (см., например, обзор [11]). В рамках этих задач анализируются: устойчивость не по всем, а только по отношению к части переменных нулевого положения равновесия, и устойчивость по всем и по части переменных "частичного" (нулевого) положения равновесия как детерминированных, так и стохастических систем различной формы описания. Как и при изучении устойчивости по всем переменным, основным методом решения является прямой метод Ляпунова в соответствующей модификации. Применительно к классу систем стохастических функционально-дифференциальных уравнений для анализа задачи устойчивости по части переменных, наряду с методом функций Ляпунова [12, 13], используется подход, разработанный в научной школе Н.В. Азбелева [14, 15].

Предлагаемая в данной статье постановка задачи частичной устойчивости по вероятности и подход к ее решению на основе метода функционалов Ляпунова—Красовского дополняет круг указанных исследований. Далее рассматривается система нелинейных нестационарных функционально-дифференциальных уравнений с последействием (запаздыванием) общего вида, подверженных воздействию взаимно независимых случайных процессов "белого" шума. Предполагается, что система допускает "частичное" (по некоторой части переменных состояния) нулевое положение равновесия. Ставится задача устойчивости по вероятности этого положения равновесия; устойчивость рассматривается не по всем, а только по отношению к части определяющих его переменных. Для расширения возможностей используемого метода исследования также предлагается проводить корректировку области функционального пространства, в которой строятся вспомогательные функционалы. Допускаются выполненными квазилокальное условие Коши—Липшица и условие "линейного роста", гарантирующие существование и единственность сильных "глобальных" решений изучаемой системы стохастических функционально-дифференциальных уравнений. Получены условия частичной устойчивости указанного вида.

1. Постановка задачи. Пусть $\tau > 0$ — заданное число, R^n — линейное пространство n-мерных векторов $\mathbf{x}$ с евклидовой нормой $|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$ (x_i — i-я компонента вектора $\mathbf{x}$), $R_+ = [0, +\infty)$. Сделаем разбиение $\mathbf{x} = (\mathbf{y}^\mathrm{T}, \mathbf{z}^\mathrm{T})^\mathrm{T}$ (T — знак транспонирования) вектора $\mathbf{x}$ на две части, где $\mathbf{y} \in R^m$, $\mathbf{z} \in R^{n-m}$ $(1 \le m < n)$. Если $t_0, \beta \in R_+$ и $\beta > t_0$, то для вектор-функции $\mathbf{x}(t)$: $[t_0 - \tau, \beta) \to R^n$ определим вектор-функцию $\mathbf{x}_t = \mathbf{x}(t + \theta)$ при $\theta \in [-\tau, 0]$ (отображение $\theta \mapsto \mathbf{x}(t + \theta)$ при каждом фиксированном значении t) и сделаем разбиение $\mathbf{x}_t = (\mathbf{y}_t^\mathrm{T}, \mathbf{z}_t^\mathrm{T})^\mathrm{T}$.

Допустим, что $\mathbf{w}(t) = [w_1(t), w_2(t), \ldots, w_r(t)]^\mathrm{T}$ — r-мерный случайный процесс, компоненты которого являются независимыми между собой одномерными стандартными винеровскими процессами, определенные при $t \in R_+$ на вероятностном пространстве $(\Omega, F, \mathbf{P})$; Ω — пространство элементарных событий $\{\omega\}$ с заданными на нем σ-алгеброй F измеримых множеств с фильтрацией $\{F_t\}_{t \ge 0}$ и вероятностной мерой $\mathbf{P}$: $F \to [0, 1]$.

Рассмотрим нелинейную нестационарную систему стохастических функционально-дифференциальных уравнений в форме Ито [1—4, 16, 17]:

$$d\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t, \mathbf{x}_t)dt + \sum_{k=1}^{r} \boldsymbol{\sigma}_k(t, \mathbf{x}_t)dw_k(t),$$

которую с учетом указанного разбиения фазового вектора представим в виде

$$\begin{aligned} d\mathbf{y}(t) &= \mathbf{Y}(t, \mathbf{y}_t, \mathbf{z}_t)dt + \sum_{k=1}^{r} \boldsymbol{\sigma}_{k\mathbf{y}}(t, \mathbf{y}_t, \mathbf{z}_t)dw_k(t), \\ d\mathbf{z}(t) &= \mathbf{Z}(t, \mathbf{y}_t, \mathbf{z}_t)dt + \sum_{k=1}^{r} \boldsymbol{\sigma}_{k\mathbf{z}}(t, \mathbf{y}_t, \mathbf{z}_t)dw_k(t). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Система (1.1) относится к классу систем функционально-дифференциадльных уравнений с последействием (запаздыванием): вектор-функции $\mathbf{y}_t$, $\mathbf{z}_t$ в правой части задают компоненты $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ вектора состояния $\mathbf{x}$ как функции запаздывающего аргумента $t + \theta$, $\theta \in [-\tau, 0]$; число $\tau > 0$ определяет величину запаздывания.

Рассмотрим пространство C непрерывных вектор-функций $\boldsymbol{\varphi}(\theta)$: $[-\tau, 0] \to R^n$ с нормой $\|\boldsymbol{\varphi}\| = \max |\boldsymbol{\varphi}(\theta)|$, $\theta \in [-\tau, 0]$ и допустим, что выполняются следующие условия:

1) операторы сноса $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t, \boldsymbol{\varphi})$: $R_+ \times C \to R^n$ и диффузии $\boldsymbol{\sigma}_k = \boldsymbol{\sigma}_k(t, \boldsymbol{\varphi})$: $R_+ \times C \to R^n$ непрерывны в области $R_+ \times C$;

2) для каждого $I = 1, 2, \ldots$ существуют постоянные $K_I > 0$, такие, что для всех $t \geq 0$, $\boldsymbol{\varphi}_1$, $\boldsymbol{\varphi}_2 \in C$, для которых $\max(\|\boldsymbol{\varphi}_1\|, \|\boldsymbol{\varphi}_2\|) \leq I$, имеют место неравенства (локальное условие Коши—Липшица в форме [17], называемое также квазилокальным условием [18])

$$|\mathbf{X}(t, \boldsymbol{\varphi}_2) - \mathbf{X}(t, \boldsymbol{\varphi}_1)| \leq K_I\|\boldsymbol{\varphi}_2 - \boldsymbol{\varphi}_1\|, \ |\boldsymbol{\sigma}_k(t, \boldsymbol{\varphi}_2) - \boldsymbol{\sigma}_k(t, \boldsymbol{\varphi}_1)| \leq K_I\|\boldsymbol{\varphi}_2 - \boldsymbol{\varphi}_1\|;$$

3) в области $R_+ \times C$ существует постоянная $M > 0$, такая, что (условие “линейного роста”)

$$|\mathbf{X}(t, \boldsymbol{\varphi})| \leq M(1 + \|\boldsymbol{\varphi}\|), \ |\boldsymbol{\sigma}_k(t, \boldsymbol{\varphi})| \leq M(1 + \|\boldsymbol{\varphi}\|).$$

Пусть H_0 — пространство F_0-измеримых вектор-функций $\xi = \xi(\theta)$: $[-\tau, 0] \to R^n$ с нормой $\|\xi\| = \sup |\xi(\theta)|$, $\theta \in [-\tau, 0]$, траектории которых с вероятностью 1 ограничены и непрерывны.

При сделанных предположениях для всех $t_0 \geq 0$, $\mathbf{x}_0 = \xi \in H_0$ существует [17] единственный непрерывный почти наверное случайный многомерный процесс $\mathbf{x}(t_0, \xi)$, согласованный с потоком σ-алгебр $\{F_t\}_{t \geq 0}$ и являющийся сильным решением системы (1.1); при этом система (1.1) понимается как запись соответствующей системы Ито в интегральной форме. Более того, $\mathbf{E}[\sup |\mathbf{x}(r, \xi)|^2] < \infty$ при $r \in [-\tau, t]$, $t \geq 0$, где $\mathbf{E}$ — оператор математического ожидания по отношению к вероятностной мере $\mathbf{P}$. Обозначим через $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t; t_0, \xi)$ значения случайной вектор-функции $\mathbf{x}(t_0, \xi)$ в момент времени t.

Проводя в пространстве C разбиение $\boldsymbol{\varphi} = (\boldsymbol{\varphi}_\mathbf{y}^\mathrm{T}, \boldsymbol{\varphi}_\mathbf{z}^\mathrm{T})^\mathrm{T}$, соответствующее разбиению $\mathbf{x} = (\mathbf{y}^\mathrm{T}, \mathbf{z}^\mathrm{T})^\mathrm{T}$ фазового вектора $\mathbf{x}$, рассмотрим множество $M = \{\boldsymbol{\varphi} \in C: \boldsymbol{\varphi}_\mathbf{y} = \mathbf{0}\}$. Если $\mathbf{Y}(t, \boldsymbol{\varphi}) \equiv \mathbf{0}$ при $\boldsymbol{\varphi} \in M$, то решение $\mathbf{x}(t_0, \xi)$ системы (1.1) с вероятностью 1 удовлетворяет условию $\|\mathbf{y}_t(t_0, \xi)\| \equiv 0$. Другими словами, множество $\mathbf{y}_t = \mathbf{0}$ есть “частичное” положение равновесия системы (1.1), являющееся (при сделанном предположении о единственности решений) инвариантным множеством этой системы.

Следуя подходу теории частичной устойчивости, будем анализировать устойчивость “частичного” положения равновесия $\mathbf{y}_t = \mathbf{0}$ не по всем определяющим его переменным, а только по отношению к их некоторой наперед *заданной* части. Для этого предположим, что $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1^\mathrm{T}, \mathbf{y}_2^\mathrm{T})^\mathrm{T}$, причем вектор $\mathbf{y}_1$ включает те компоненты вектора $\mathbf{y}$, устойчивость по отношению к которым изучается. Для расширения функциональных возможностей рассматриваемых далее понятий $\mathbf{y}_1$-устойчивости “частичного” положения равновесия $\mathbf{y}_t = \mathbf{0}$ введем также произвольным образом разбиение $\mathbf{z} = (\mathbf{z}_1^\mathrm{T}, \mathbf{z}_2^\mathrm{T})^\mathrm{T}$ вектора $\mathbf{z}$ “неконтролируемых” переменных на две группы переменных. Указанным разбиениям векторов $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$ поставим в соответствие разбиения на две части компонент $\xi_\mathbf{y}$ и $\xi_\mathbf{z}$ начальной вектор-функции: $\xi_\mathbf{y} = (\xi_{\mathbf{y}1}{}^\mathrm{T}, \xi_{\mathbf{y}2}{}^\mathrm{T})^\mathrm{T}$ и $\xi_\mathbf{z} = (\xi_{\mathbf{z}1}{}^\mathrm{T}, \xi_{\mathbf{z}2}{}^\mathrm{T})^\mathrm{T}$. Обозначим через S_δ область в H_0, такую, что $\{\xi \in H_0: \|\xi_\mathbf{y}\| < \delta, \|\xi_{\mathbf{z}1}\| \le L, \|\xi_{\mathbf{z}2}\| < \infty\}$, где δ — достаточно малое, а L — любое наперед заданное положительные числа; $\|\xi_\mathbf{y}\| = \sup|\xi_\mathbf{y}(\theta)|$, $\|\xi_{\mathbf{z}i}\| = \sup|\xi_{\mathbf{z}i}(\theta)|$ $(i = 1, 2)$, $\theta \in [-\tau, 0]$.

Рассматриваемые далее понятия устойчивости “частичного” положения равновесия $\mathbf{y}_t = \mathbf{0}$ системы (1.1) основаны на допущении, что для любой начальной вектор-функции $\mathbf{x}_0 = \xi \in H_0$ с вероятностью 1 имеет место включение $\xi \in S_\delta$. Поэтому по аналогии с детерминированным случаем [19—21] в данном случае можно говорить об устойчивости при больших значениях $\xi_{\mathbf{z}1}$ в целом по $\xi_{\mathbf{z}2}$ (for a large values of $\xi_{\mathbf{z}1}$ and on the whole with respect to $\xi_{\mathbf{z}2}$).

Определение 1. “Частичное” положение равновесия $\mathbf{y}_t = \mathbf{0}$ системы (1.1) $\mathbf{y}_1$-*устойчиво по вероятности* при больших значениях $\xi_{\mathbf{z}1}$ в целом по $\xi_{\mathbf{z}2}$, если для каждого $t_0 \ge 0$ и для любых сколь угодно малых чисел $\varepsilon > 0$, $\gamma > 0$, а также для любого заданного числа $L > 0$ найдется число $\delta(\varepsilon, \gamma, t_0, L) > 0$, такое, что для любой начальной вектор-функции $\mathbf{x}_0 = \xi \in H_0$, удовлетворяющей условию $\mathbf{P}\{\xi \in S_\delta\} = 1$, при всех $t \ge t_0$ следует неравенство

$$\mathbf{P}\{\sup_{t \ge t_0} |\mathbf{y}_1(t; t_0, \xi)| > \varepsilon\} < \gamma. \tag{1.2}$$

Определение 2. “Частичное” положение равновесия $\mathbf{y}_t = \mathbf{0}$ системы (1.1) *равномерно* $\mathbf{y}_1$-*устойчиво по вероятности* при больших значениях $\xi_{\mathbf{z}1}$ в целом по $\xi_{\mathbf{z}2}$, если в определении $\mathbf{y}_1$-устойчивости $\delta = \delta(\varepsilon, \gamma, L)$.

Ставится задача нахождения условий $\mathbf{y}_1$-устойчивости по вероятности (при больших значениях $\xi_{\mathbf{z}1}$ в целом по $\xi_{\mathbf{z}2}$) “частичного” положения равновесия $\mathbf{y}_t = \mathbf{0}$ системы (1.1) в контексте метода функционалов Ляпунова—Красовского.

Сформулированная задача представляет интерес как задача анализа системы (1.1), но может использоваться и для решения соответствующей задачи частичной стабилизации этой системы посредством приложения управляющих воздействий. Кроме того, указанная задача может рассматриваться также как *вспомогательная* при анализе устойчивости по отношению ко всем переменным “частичного” положения равновесия $\mathbf{y}_t = \mathbf{0}$ системы (1.1) при соответствующем обобщении и развитии задачи частичной детектируемости. Подобный подход использовался для детерминированных функционально-дифференциальных систем с последействием [21]. Отметим, что задачи частичной стабилизации и частичной детектируемости динамических систем различной формы описания относятся к актуальным задачам современной нелинейной теории управления [22—24].

Замечание 1. В отличие от локального условия Коши—Липшица, условие “линейного роста” применительно к правой части системы (1.1) является ограничительным во многих случаях. Однако это условие можно заменить более слабыми условиями, которые формулируются в виде требований к вспомогательным функциям Ляпунова или функционалам Ляпунова—Красовского [2, 16, 17].

Замечание 2. Введенные понятия частичной устойчивости опираются на соответствующие понятия стохастической устойчивости по отношению ко всем переменным, предложенные в [1, 2]. Наиболее близкими являются понятия частичной устойчивости: по отношению ко всем [25, 26] и по части переменных [27] “частичного” положения равновесия систем стохастических дифференциальных уравнений в форме Ито, детерминированных систем обыкновенных дифференциальных [28, 29] и функционально-дифференциальных уравнений с последействием [20, 21], а также систем дискретных (конечно-разностных) уравнений [30, 31]. Предположения “в целом по $\xi_\mathbf{z}$” или “при больших значениях $\xi_\mathbf{z}$” характерны для определений устойчивости (по всем и по части переменных) “частичного” положения равновесия $\mathbf{y}_t = \mathbf{0}$ системы (1.1), но приводят к различным требованиям к функционалам Ляпунова—Красовского. За счет разделения $\xi_\mathbf{z} = (\xi_{\mathbf{z}1}{}^\mathrm{T}, \xi_{\mathbf{z}2}{}^\mathrm{T})^\mathrm{T}$ вектор-функции $\xi_\mathbf{z}$ на две части возникают “промежуточные” понятия $\mathbf{y}_1$-устойчивости в смысле введенных определений 1, 2. При этом надлежащий выбор указанного разделения определяется конкретной структурой рассматриваемой системы (1.1) и является результатом поиска компромисса между содержательным смыслом используемого понятия $\mathbf{y}_1$-устойчивости “частичного” положения равновесия $\mathbf{y}_t = \mathbf{0}$ и требованиями к функционалам Ляпунова—Красовского.

2. Условия частичной устойчивости по вероятности. В контексте метода функционалов Ляпунова—Красовского рассмотрим однозначные, непрерывные функционалы $V = V(t, \boldsymbol{\psi})$: $R_+ \times C \to R_+$, $V(t, \mathbf{0}) \equiv 0$, определенные на любой вектор-функции $\boldsymbol{\psi} \in H_0$ в области

$$t \geq 0, \ \|\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{y}1}\| < h, \ \ \|\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{y}2}\| + \|\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{z}}\| < \infty. \tag{2.1}$$

Разбиение $\boldsymbol{\psi} = (\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{y}1}{}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{y}2}{}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{z}}{}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ соответствует сделанному разбиению $\mathbf{x} = (\mathbf{y}_1{}^{\mathrm{T}}, \mathbf{y}_2{}^{\mathrm{T}}, \mathbf{z}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ фазового вектора $\mathbf{x}$; $\|\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{y}i}\| = \sup |\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{y}i}(\theta)|$ $(i = 1, 2)$, $\|\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{z}}\| = \sup |\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{z}}(\theta)|$, $\theta \in [-\tau, 0]$.

Подставим в функционал $V(t, \boldsymbol{\psi})$ вектор-функцию $\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_t(t_0, \boldsymbol{\xi})$, определяющую элемент траектории системы (1.1) в текущий момент времени $t \geq t_0$. Аналогом производной функционала в силу исследуемой системы (1.1) стохастических функционально-дифференциальных уравнений является ассоциированный с этой системой дифференциальный производящий оператор (усредненная производная)

$$\mathbf{L}\,V(t, \boldsymbol{\psi}) = \overline{\lim_{\delta \to 0^+}} \frac{1}{\delta}\{\mathbf{E}_{t, \boldsymbol{\psi}}[V(t + \delta, \mathbf{x}_{t+\delta}(t_0, \boldsymbol{\xi})] - V(t, \boldsymbol{\psi})\},$$

где оператор $\mathbf{E}_{t, \boldsymbol{\psi}}[V(t + \delta, \mathbf{x}_{t+\delta})]$ определяет условное математическое ожидание при $\boldsymbol{x}_{t+\delta} = \boldsymbol{\psi}$ случайной величины $V(t + \delta, \mathbf{x}_{t+\delta})$, порожденной набором реализаций $\{\mathbf{x}(t_0, \boldsymbol{\xi}, \omega), \mathbf{w}(t, \omega)\}$ случайного процесса $\{\mathbf{x}(t_0, \boldsymbol{\xi}), \mathbf{w}(t)\}$, являющегося решением системы (1.1).

Можно выделить класс функционалов, для которых указанный оператор конструктивно вычисляется. Для этого представим произвольный функционал $V = V(t, \boldsymbol{\psi})$ в виде $V = V(t, \boldsymbol{\psi}(0), \boldsymbol{\psi}(\theta))$, $\theta < 0$, и положим [2—4]:

$$V_{\psi}(t, \mathbf{x}) = V(t, \boldsymbol{\psi}) = V(t, \mathbf{x}_t) = V(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t + \theta)),$$

$$\boldsymbol{\psi} = \mathbf{x}_t, \ \theta < 0, \ \mathbf{x} = \boldsymbol{\psi}(0) = \mathbf{x}(t).$$

Предположим, что функция $V_{\psi}(t, \mathbf{x})$ дважды непрерывно дифференцируема по $\mathbf{x}$ и имеет ограниченную производную по t при почти всех $t \in R_+$. Тогда для выделенного класса функционалов имеет место функциональный аналог классической формулы Ито [2—4]:

$$\mathbf{E}[V(t, \mathbf{x}_t) - V(s, \mathbf{x}_s)] = \int_s^t \mathbf{E}[\mathbf{L}V(r, \mathbf{x}_r)]dr,$$

$$\mathbf{L}V(t, \boldsymbol{\psi}) = \frac{\partial V_{\psi}(t, \mathbf{x})}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V_{\psi}(t, \mathbf{x})}{\partial x_i} X_i(t, \mathbf{x}) + 0.5 \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 V_{\psi}(t, \mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} a_{ij}(t, \mathbf{x}),$$

$$\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^{\mathrm{T}} = (\mathbf{Y}^{\mathrm{T}}, \mathbf{Z}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}, \ \boldsymbol{\sigma}_k = (\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{y}k}{}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{z}k}{}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\sigma} = (\boldsymbol{\sigma}_1, \ldots, \boldsymbol{\sigma}_r), \ \{a_{ij}(t, \mathbf{x})\} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}.$$

Для формулировки условий частичной устойчивости введем разбиение $\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{z}} = (\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{z}1}{}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{z}2}{}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ вектор-функции $\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{z}}$, отвечающее сделанному разбиению $\mathbf{z} = (\mathbf{z}_1{}^{\mathrm{T}}, \mathbf{z}_2{}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ компоненты $\mathbf{z}$ фазового вектора $\mathbf{x}$. Дополнительно будут использоваться следующие вспомогательные функционалы и функции.

1. Непрерывные в области (2.1) функционалы $V^*(t, \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{y}}, \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{z}1})$, $V^*(\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{y}}, \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{z}1})$, необходимые для конкретизации (в соответствии с постановкой задачи) требований к основному V-функционалу Ляпунова—Красовского, и непрерывная в области (2.1) вспомогательная векторная, вообще говоря, функция $\boldsymbol{\mu}(t, \boldsymbol{\psi})$: $R_+ \times H_0 \to R^l$ $(l \geq 1)$, $\boldsymbol{\mu}(t, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$, посредством которой корректируется область функционального пространства, где строится основной V-функционал. Определим $\|\boldsymbol{\mu}(t, \boldsymbol{\psi})\| = \sup |\boldsymbol{\mu}(t, \boldsymbol{\psi}(\theta))|$ $(\theta \in [-\tau, 0], t \in R_+)$.

2. Непрерывная монотонно возрастающая по $r > 0$ скалярная функция $a(r)$: $R_+ \to R_+$, $a(0) = 0$ (функция типа Хана [32]), определяющая стандартные требования к V-функционалу.

Введение наряду с V-функционалом Ляпунова—Красовского вспомогательной $\boldsymbol{\mu}(t, \boldsymbol{\psi})$-функции мотивируется следующим обстоятельством. При исследовании $\mathbf{y}_1$-устойчивости по вероятности "частичного" положения равновесия $\mathbf{y}_t = \mathbf{0}$ системы (1.1) в общем случае имеет место зависимость V-функционала Ляпунова—Красовского не только от t, $\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{y}1}$, но и от $\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{y}2}$, $\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{z}}$. Ситуация аналогична той, что имеет место для функций Ляпунова в задаче устойчивости по части переменных для систем обыкновенных дифференциальных, стохастических, а также дискретных уравнений (см. например, работы [19, 31, 32]).

В результате анализ $\mathbf{y}_1$-устойчивости в обычно рассматриваемой области

$$\|\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{y}1}\| < h_1 < h, \;\; \|\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{y}2}\| + \|\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{z}}\| < \infty \tag{2.2}$$

функционального пространства не всегда дает возможность выявить желаемые свойства V-функционала или наделить его этими свойствами. Целесообразно перейти к описанию V-функционала в более узкой области:

$$\|\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{y}1}\| + \|\boldsymbol{\mu}(t, \boldsymbol{\psi})\| < h_1 < h, \;\; \|\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{y}2}\| + \|\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{z}}\| < \infty, \tag{2.3}$$

если иметь в виду, что фактически $\mathbf{y}_1$-устойчивость "частичного" положения равновесия $\mathbf{y}_t = \mathbf{0}$ системы (1.1) означает выполнение требуемых вероятностных оценок вида (1.2) не только для компонент вектора $\mathbf{y}_1$, но и для компонент некоторой $\boldsymbol{\mu}(t, \mathbf{x})$-функции фазовых переменных системы (1.1). Указанную $\boldsymbol{\mu}(t, \mathbf{x})$-функцию не всегда возможно указать заранее. Поэтому соответствующую ей $\boldsymbol{\mu}(t, \boldsymbol{\psi})$-функцию в функциональном пространстве $R_+ \times H_0$ естественно трактовать как дополнительную векторную функцию, которая (как и сам подходящий функционал Ляпунова—Красовского) определяется в процессе решения исходной задачи $\mathbf{y}_1$-устойчивости.

Таким образом, выбор подходящего V-функционала Ляпунова—Красовского не только возможен, но и его целесообразно согласовывать с выбором области функционального пространства, в которой функционал строится. Этого можно добиться введением наряду с V-функционалом *дополнительной* вспомогательной $\boldsymbol{\mu}(t, \boldsymbol{\psi})$-функции для соответствующей корректировки области функционального пространства.

Теорема 1. Допустим, что для системы (1.1) наряду с V-функционалом Ляпунова—Красовского $V = V(t, \boldsymbol{\psi})$ можно указать векторную функцию $\boldsymbol{\mu}(t, \boldsymbol{\psi})$, $\boldsymbol{\mu}(t, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$, для которых при всех $t \geq 0$ и достаточно малом $h_1 > 0$ в области (2.3) выполняются следующие условия:

$$V(t, \boldsymbol{\psi}) \geq a(|\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{y}1}(0)| + |\boldsymbol{\mu}(t, \boldsymbol{\psi}(0))|), \tag{2.4}$$

$$V(t, \boldsymbol{\psi}) \leq V^*(t, \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{y}}, \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{z}1}), \;\; V^*(t, \mathbf{0}, \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{z}1}) \equiv 0, \tag{2.5}$$

$$\mathbf{L}V(t, \boldsymbol{\psi}) \leq 0. \tag{2.6}$$

Тогда "частичное" положение равновесия $\mathbf{y}_t = \mathbf{0}$ системы (1.1) $\mathbf{y}_1$-устойчиво по вероятности при больших значениях $\xi_{\mathbf{z}1}$ в целом по $\xi_{\mathbf{z}2}$.

Теорема 2. Если условия (2.5) заменить условиями

$$V(t, \boldsymbol{\psi}) \leq V^*(\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{y}}, \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{z}1}), \;\; V^*(\mathbf{0}, \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{z}1}) \equiv 0, \tag{2.7}$$

то "частичное" положение равновесия $\mathbf{y}_t = \mathbf{0}$ системы (1.1) равномерно $\mathbf{y}_1$-устойчиво по вероятности при больших значениях $\xi_{\mathbf{z}1}$ в целом по $\xi_{\mathbf{z}2}$.

Доказательство теорем 1 и 2 приведено в Приложении.

Замечание 3. В теоремах 1 и 2 рассматриваемый V-функционал Ляпунова—Красовского и ассоциированный с системой (1.1) дифференциальный производящий оператор $\mathbf{L}V(t, \boldsymbol{\psi})$ являются, вообще говоря, *знакопеременными* в области (2.2). Наряду с V-функционалом вспомогательная $\boldsymbol{\mu}$-функция вводится для наиболее рациональной замены области (2.2) областью (2.3). Условия (2.5) и (2.7) позволяют выделить *допустимую структуру* используемого V-функционала, которая определяется спецификой (при больших значениях $\xi_{\mathbf{z}1}$ в целом по $\xi_{\mathbf{z}2}$) поставленной задачи частичной устойчивости; в этих условиях допускается *произвольный* непрерывный V^*-функционал, удовлетворяющий соответственно условию $V^*(t, \mathbf{0}, \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{z}1}) \equiv 0$ или $V^*(\mathbf{0}, \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{z}1}) \equiv 0$, ограничивающий V-функционал сверху. Условия (2.5) являются "промежуточными" между менее ограничительным условием $V(t, \mathbf{0}, \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{z}}) \equiv 0$ и более ограничительными условиями $V(t, \boldsymbol{\psi}) \le V^*(t, \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{y}})$, $V^*(t, \mathbf{0}) \equiv 0$, при выполнении которых "частичное" положение равновесия $\mathbf{y}_t = \mathbf{0}$ системы (1.1) соответственно $\mathbf{y}_1$-устойчиво по вероятности при больших значениях $\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{z}}$ или $\mathbf{y}_1$-устойчиво по вероятности в целом по $\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{z}}$; аналогичное утверждение касается также и условий (2.7).

Замечание 4. В рамках предложенного подхода нелинейные V-функционалы Ляпунова—Красовского могут быть построены как знакоопределенные *квадратичные* функционалы (или функционалы более высокого порядка) $V(t, \boldsymbol{\psi}) \equiv V^*(t, \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{y}1}, \boldsymbol{\mu}(t, \boldsymbol{\psi}))$, определенные на вектор-функциях $\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{y}1}$ и $\boldsymbol{\mu}(t, \boldsymbol{\psi})$. При этом выбор $\boldsymbol{\mu}$-функций должен быть согласован с условиями (2.5) и (2.7): допустимы, например, $\boldsymbol{\mu}$-функции вида $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{y}2}, \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{z}1})$, $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{z}1}) \equiv \mathbf{0}$.

Замечание 5. При отсутствии последействия в системе (1.1) теоремы 1 и 2 переходят в соответствующие результаты для систем стохастических уравнений с непрерывной [27] и дискретной [31] динамикой, а в случае $w_k(t) \equiv 0$ получаем соответствующие результаты для детерминированных систем обыкновенных дифференциальных [28, 29], дискретных (конечно-разностных) [30] и функционально-дифференциальных [19, 21] уравнений. Если система (1.1) допускает "полное" положение равновесия $\mathbf{x}_t = \mathbf{0}$, то в случае $w_k(t) \equiv 0$, $\boldsymbol{\mu}(t, \boldsymbol{\psi}) \equiv \mathbf{0}$, а также при предположении $\|\boldsymbol{\xi}\| < \delta$, при выполнении условий (2.4), (2.6) имеем функционально-дифференциальный вариант (см. [19, 32]) классической теоремы В.В. Румянцева [10, 11] об устойчивости по отношению к части переменных.

Замечание 6. Возможности использования метода функций Ляпунова для анализа задач частичной устойчивости (стабилизации) систем стохастических дифференциальных уравнений Ито анализировались в ряде публикаций [33—43], в том числе с учетом случайной структуры таких систем [38—40].

3. Примеры. Рассмотрим примеры, показывающие особенности предложенного подхода к анализу частичной устойчивости системы (1.1).

Пример 1. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{gathered} dy_1(t) = [ay_1(t) + ly_2(t-\tau_1)z_1(t-\tau_1)]dt + \alpha y_1(t-\tau_2)dw_1(t), \\ dy_2(t) = [b + dy_1(t)]y_2(t)dt, \\ dz_1(t) = [c + ey_1(t)]z_1(t)dt, \quad dz_2(t) = Z_2(t, \mathbf{x}_t)dt, \end{gathered} \tag{3.1}$$

где $\tau_1 > 0$, $\tau_2 > 0$ — постоянные, определяющие дискретно входящие запаздывания; a, b, c, d, e, l, α — постоянные параметры. Система (3.1) является частным случаем системы (1.1), в которой $\tau = \max(\tau_1, \tau_2)$; оператор Z_2 удовлетворяет общим требованиям к системе (1.1).

Система (3.1) допускает "частичное" положение равновесия

$$y_{1t} = y_{2t} = 0. \tag{3.2}$$

Рассмотрим V-функционал Ляпунова—Красовского ($\beta = \mathrm{const} > 0$)

$$\begin{aligned} V(\boldsymbol{\psi}) &= 0.5[\psi_{y1}{}^2(0) + \psi_{y2}{}^2(0)\psi_{z1}{}^2(0)] + \\ &+ \beta \int_{-\tau_1}^{0} \psi_{y2}{}^2(\theta)\psi_{z1}{}^2(\theta)\,d\theta + 0.5\alpha^2 \int_{-\tau_2}^{0} \psi_{y1}{}^2(\theta)\,d\theta \end{aligned} \tag{3.3}$$

и вспомогательную скалярную μ_1-функцию вида

$$\mu_1(\boldsymbol{\psi}) = \psi_{y2}\psi_{z1}. \tag{3.4}$$

Имеют место соотношения

$$0.5[\psi_{y1}{}^2(0) + \mu_1{}^2(0)] \le V(\boldsymbol{\psi}) = V^*(\psi_{y1}, \psi_{y2}, \psi_{z1}), \quad V^*(0, 0, \psi_{z1}) \equiv 0.$$

Для V-функционала Ляпунова—Красовского (3.3) в области (2.3) выполняются условия (2.4) и (2.7), а ассоциированный с системой (3.1) дифференциальный производящий оператор $\mathbf{L}V(\boldsymbol{\psi})$ определяется следующим образом:

$$\mathbf{L}V(\boldsymbol{\psi}) = \psi_{y1}(0)[a\psi_{y1}(0) + l\mu_1(-\tau_1)] + \mu_1(0)[(b+c)\mu_1(0) + (d+e)\psi_{y1}(0)\mu_1(0)] +$$

$$+ 0.5\alpha^2\psi_{y1}{}^2(-\tau_2) + \beta[\mu_1{}^2(0) - \mu_1{}^2(-\tau_1)] + 0.5\alpha^2[\psi_{y1}{}^2(0) - \psi_{y1}{}^2(-\tau_2)] =$$

$$= (a + 0.5\alpha^2)\psi_{y1}{}^2(0) + l\psi_{y1}(0)\mu_1(-\tau_1) - \beta\mu_1{}^2(-\tau_1) + (b + c + \beta)\mu_1{}^2(0) + (d+e)\psi_{y1}(0)\mu_1{}^2(0).$$

В процессе вычислений использованы соотношения

$$\mathbf{L}V(\boldsymbol{\psi}) = \mathbf{L}V^*(t, \boldsymbol{\psi}) = 0.5[\psi_{y1}{}^2(0) + \mu_1{}^2(0)] + \beta\int\limits_{t-\tau_1}^{t}\mu_1{}^2(\theta)d\theta + 0.5\alpha^2\int\limits_{t-\tau_2}^{t}\psi_{y1}{}^2(\theta)d\theta,$$

$$\frac{\partial V_\psi(t,\mathbf{x})}{\partial t} = \beta[\mu_1{}^2(0) - \mu_1{}^2(-\tau_1)] + 0.5\alpha^2[\psi_{y1}{}^2(0) - \psi_{y1}{}^2(-\tau_2)],$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V_\psi(t,\mathbf{x})}{\partial x_i}X_i(t,\mathbf{x}) = \psi_{y1}(0)[a\psi_{y1}(0) + l\mu_1(-\tau_1)] + \mu_1{}^2(0)[(b+c) + (d+e)\psi_{y1}(0)],$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 V_\psi(t,\mathbf{x})}{\partial x_i\partial x_j}a_{ij}(t,\mathbf{x}) = \alpha^2\psi_{y1}{}^2(-\tau_2),$$

$$\mu_1(0) = \psi_{y2}(0)\psi_{z1}(0),\ \mu_1(-\tau_i) = \psi_{y2}(-\tau_i)\psi_{z1}(-\tau_i)\ (i = 1, 2).$$

При достаточно малом $h_1 > 0$ в области (2.3) неравенство $\mathbf{L}V(\boldsymbol{\psi}) \le 0$ будет иметь место, если $2a + \alpha^2 \le 0$, $2(2a + \alpha^2)\beta + l^2 \le 0$, $b + c + \beta \le 0$.

Пусть параметры системы (3.1) удовлетворяют условиям

$$2a + \alpha^2 < 0,\ \ 2(2a + \alpha^2)(b + c) > l^2. \tag{3.5}$$

Полагая $\beta = -(b + c) - \varepsilon$ ($\varepsilon = \text{const} > 0$) в V-функционале (3.3), заключаем, что в данном случае при достаточно малых ε и $h_1 > 0$ в области (2.3) (но не в области (2.2)) при любых значениях параметров d, e и при любых постоянных значениях $\tau_1 > 0$, $\tau_2 > 0$ имеет место оценка $\mathbf{L}V(\boldsymbol{\psi}) \le 0$. Значит, для V-функционала Ляпунова—Красовского (3.3) в области (2.3) помимо условий (2.4), (2.7) также верно условие (2.6).

На основании теоремы 2 заключаем, что при выполнении условий (3.5) “частичное” положение равновесия (3.2) системы (3.1) равномерно y_1 -устойчиво по вероятности при больших значениях ξ_{z1} в целом по ξ_{z2}.

Отметим, что ассоциированный с системой (3.1) дифференциальный производящий оператор $\mathbf{L}V(\boldsymbol{\psi})$ в области (2.2) является *знакопеременным*.

Заменим первое уравнение системы (3.1) уравнением

$$dy_1(t) = [a + ly_2(t-\tau_1)z_1(t-\tau_1)]y_1(t)dt + \alpha y_1(t-\tau_2)dw_1(t),$$

а остальные уравнения этой системы оставим без изменения.

Для анализа устойчивости “частичного” положения равновесия (3.2) данной системы также рассмотрим V-функционал Ляпунова—Красовского (3.3) и вспомогательную μ_1-функцию вида (3.4). В данном случае имеют место соотношения

$$\mathbf{L}V(\boldsymbol{\psi}) = \psi_{y1}(0)[a + l\mu_1(-\tau_1)]\psi_{y1}(0) + \mu_1(0)[(b+c)\mu_1(0) + (d+e)\psi_{y1}(0)\mu_1(0)] +$$

$$+ \beta[\mu_1{}^2(0) - \mu_1{}^2(-\tau_1)] + 0.5\alpha^2\psi_{y1}{}^2(-\tau_2) + 0.5\alpha^2[\psi_{y1}{}^2(0) - \psi_{y1}{}^2(-\tau_2)] =$$

$$= (a + 0.5\alpha^2)\psi_{y1}{}^2(0) + (b + c + \beta)\mu_1{}^2(0) - \beta\mu_1{}^2(-\tau_1) + l\psi_{y1}{}^2(0)\mu_1(-\tau_1) + (d+e)\psi_{y1}(0)\mu_1{}^2(0).$$

При достаточно малом $h_1 > 0$ в области (2.3) неравенство $\mathbf{L}V(\boldsymbol{\psi}) \le 0$ будет выполнено, если $2a + \alpha^2 \le 0$, $b + c + \beta \le 0$. Поэтому, полагая $\beta = \varepsilon$ ($\varepsilon = \text{const} > 0$) в V-функционале (3.3), заключаем, что если параметры рассматриваемой системы удовлетворяют условиям

$$2a + \alpha^2 \le 0,\ \ b + c < 0, \tag{3.6}$$

то при достаточно малых ε и $h_1 > 0$ в области (2.3) (но не в области (2.2)) при любых значениях параметров l, d, e и любых постоянных значениях $\tau_1 > 0$, $\tau_2 > 0$ имеет место оценка $\mathbf{L}V(\boldsymbol{\psi}) \le 0$. Таким образом, при выполнении условий (3.6) "частичное" положение равновесия (3.2) рассматриваемой системы равномерно y_1-устойчиво по вероятности при больших значениях ξ_{z1} в целом по ξ_{z2}.

П р и м е р 2. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{gathered} dy_1(t) = [a + ly_2(t-\tau_1)z_1(t-\tau_1)]y_1(t)dt + \alpha y_1(t-\tau_2)dw_1(t), \\ dy_2(t) = [b + dy_1(t-\tau_2)]y_2(t)dt, \\ dz_1(t) = [c + ey_1(t-\tau_2)]z_1(t)dt, \quad dz_2(t) = Z_2(t, \mathbf{x}_t)dt. \end{gathered} \tag{3.7}$$

Для анализа устойчивости "частичного" положения равновесия (3.2) используем V-функционал Ляпунова—Красовского ($\beta_1, \beta_2 = \text{const} > 0$)

$$\begin{gathered} V(\boldsymbol{\psi}) = 0.5[\psi_{y1}{}^2(0) + \psi_{y2}{}^2(0)\psi_{z1}{}^2(0)] + \\ + \beta_1 \int\limits_{-\tau_1}^{0} \psi_{y2}{}^2(\theta)\psi_{z1}{}^2(\theta)d\theta + (0.5\alpha^2 + \beta_2)\int\limits_{-\tau_2}^{0} \psi_{y1}{}^2(\theta)d\theta \end{gathered} \tag{3.8}$$

и вспомогательную μ_1-функцию вида (3.4).

Для V-функционала (3.8) в области (2.3) выполняются условия (2.4) и (2.7), а ассоциированный с системой (3.7) дифференциальный производящий оператор $\mathbf{L}V(\boldsymbol{\psi})$ определяется следующим образом:

$$\begin{gathered} \mathbf{L}V(\boldsymbol{\psi}) = \psi_{y1}(0)[a + l\mu_1(-\tau_1)]\psi_{y1}(0) + \mu_1(0)[(b+c)\mu_1(0) + (d+e)\psi_{y1}(-\tau_2)\mu_1(0)] + \\ + \beta_1[\mu_1{}^2(0) - \mu_1{}^2(-\tau_1)] + 0.5\alpha^2\psi_{y1}{}^2(-\tau_2) + (0.5\alpha^2 + \beta_2)[\psi_{y1}{}^2(0) - \psi_{y1}{}^2(-\tau_2)] = \\ = (a + 0.5\alpha^2 + \beta_2)\psi_{y1}{}^2(0) + (b + c + \beta_1)\mu_1{}^2(0) - \beta_1\mu_1{}^2(-\tau_1) - \beta_2\psi_{y1}{}^2(-\tau_2) + \\ + l\psi_{y1}{}^2(0)\mu_1(-\tau_1) + (d+e)\psi_{y1}(-\tau_2)\mu_1{}^2(0). \end{gathered}$$

При достаточно малом $h_1 > 0$ в области (2.3) неравенство $\mathbf{L}V(\boldsymbol{\psi}) \le 0$ будет иметь место в случае $a + 0.5\alpha^2 + \beta_2 \le 0$, $b + c + \beta_1 \le 0$. Поэтому, полагая $\beta_i = \varepsilon_i$ ($\varepsilon_i = \text{const} > 0$, $i = 1, 2$) в V-функционале (3.8), заключаем, что если параметры системы (3.7) удовлетворяют условиям

$$2a + \alpha^2 < 0,\ \ b + c < 0, \tag{3.9}$$

то при достаточно малых ε_i и $h_1 > 0$ в области (2.3) (но не в области (2.2)) при любых значениях параметров l, d, e и любых постоянных значениях $\tau_1 > 0$, $\tau_2 > 0$ имеет место оценка $\mathbf{L}V(\boldsymbol{\psi}) \le 0$. Значит при выполнении условий (3.9) "частичное" положение равновесия (3.2) системы (3.7) равномерно y_1-устойчиво по вероятности при больших значениях ξ_{z1} в целом по ξ_{z2}.

Заменим первое уравнение системы (3.7) уравнением

$$dy_1(t) = [ay_1(t) + ly_2(t-\tau_1)z_1(t-\tau_1)]dt + \alpha y_1(t-\tau_1)dw_1(t),$$

а остальные уравнения этой системы оставим без изменения.

Для V-функционала (3.8) в данном случае имеют место соотношения:

$$\mathbf{L}V(\psi) = \psi_{y1}(0)[a\psi_{y1}(0) + l\mu_1(-\tau_1)] + \mu_1(0)[(b+c)\mu_1(0) + (d+e)\psi_{y1}(-\tau_2)\mu_1(0)] +$$

$$+ \beta_1[\mu_1{}^2(0) - \mu_1{}^2(-\tau_1)] + 0.5\alpha^2\psi_{y1}{}^2(-\tau_2) + (0.5\alpha^2 + \beta_2)[\psi_{y1}{}^2(0) - \psi_{y1}{}^2(-\tau_2)] =$$

$$= (a + 0.5\alpha^2 + \beta_2)\psi_{y1}{}^2(0) + l\psi_{y1}(0)\mu_1(-\tau_1) - \beta_1\mu_1{}^2(-\tau_1) +$$

$$+ (b + c + \beta_1)\mu_1{}^2(0) - \beta_2\psi_{y1}{}^2(-\tau_2) + (d+e)\psi_{y1}(-\tau_2)\mu_1{}^2(0).$$

При достаточно малом $h_1 > 0$ в области (2.3) неравенство $\mathbf{L}V(\psi) \le 0$ будет выполнено, если $a + 0.5\alpha^2 + \beta_2 \le 0$, $2(2a + \alpha^2 + 2\beta_2)\beta_1 + l^2 \le 0$, $b + c + \beta_1 \le 0$. Поэтому, полагая $\beta_i = \varepsilon_i$ ($\varepsilon_i = \text{const} > 0$, $i = 1, 2$), заключаем, что если параметры системы (3.7) удовлетворяют условиям

$$2a + \alpha^2 < 0, \ \ 2(2a + \alpha^2)(b + c) > l^2, \tag{3.10}$$

то при достаточно малых ε_i и $h_1 > 0$ в области (2.3) (но не в области (2.2)) при любых значениях параметров d, e и любых постоянных значениях $\tau_1 > 0$, $\tau_2 > 0$ имеет место оценка $\mathbf{L}V(\psi) \le 0$. Таким образом, при выполнении условий (3.10) "частичное" положение равновесия (3.2) рассматриваемой системы равномерно y_1-устойчиво по вероятности при больших значениях ξ_{z1} в целом по ξ_{z2}.

Пример 3. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{gathered} A\dot{y}_1(t) = (B - C)y_2(t)z_1(t) + u_1 + v_1, \\ B\dot{y}_2(t) = (C - A)y_1(t)z_1(t), \ \ C\dot{z}_1(t) = (A - B)y_1(t)y_2(t), \\ u_1 = [a + \alpha_1\dot{w}_1(t)]y_1(t) \ (a = \text{const} < 0), \ \ v_1 = [b(t) + \alpha_2\dot{w}_2(t)]y_1(t - \tau), \end{gathered} \tag{3.11}$$

которые определяют вращательное (угловое) движение асимметричного твердого тела относительно центра масс под действием управляющего u_1 и возмущающего v_1 моментов сил. Преднамеренно создаваемый возмущающий момент v_1 формируется с запаздыванием τ. В системе (3.11) y_1, y_2, z_1 — проекции вектора угловой скорости тела на его главные центральные оси инерции; A, B, C — главные центральные моменты инерции тела; α_1, α_2 — постоянные, определяющие интенсивности независимых гауссовских "белых шумов" $\dot{w}_1(t)$ и $\dot{w}_2(t)$ в каналах управления; $b(t)$: $[0, \infty] \to R^1$ — непрерывная и ограниченная функция.

Система (3.11) допускает "частичное" положение равновесия (3.2), которому при $C < A$, B соответствует равномерное вращение тела вокруг большей из его главных центральных осей инерции. Если возмущающий момент v_1 отсутствует ($v_1 \equiv 0$), то имеют место следующие утверждения [32]: 1) в детерминированном случае $\alpha_1 = 0$ при $a = 0$ имеет место устойчивость (неасимптотическая) этого положения равновесия в целом по z_{10}, а при $a < 0$ — асимптотическая y_1-устойчивость в целом по z_{10}; 2) при $\alpha_1 \ne 0$, $\alpha_2 = 0$ асимптотическая y_1-устойчивость по вероятности в целом по z_{10} имеет место при $a + \alpha_1{}^2/A < 0$, если системе (3.11) придать точный смысл и понимать ее как систему стохастических дифференциальных уравнений в форме Стратоновича с последующим переходом к системе в форме Ито.

В случае α_1, $\alpha_2 \ne 0$, имея в виду оценку влияния возмущающего момента v_1 на управляющий диссипативный момент u_1, найдем условие, при котором "частичное" положение равновесия (3.2) системы (3.11) равномерно y_1-устойчиво по вероятности в целом по ξ_{z1}. При этом система (3.11) понимается как система стохастических дифференциальных уравнений в форме Ито:

$$\begin{gathered} Ady_1(t) = [ay_1(t) + b(t)y_1(t - \tau) + (B - C)y_2(t)z_1(t)\,]dt + \\ + \alpha_1 y_1(t)dw_1(t) + \alpha_2 y_1(t - \tau)dw_2(t), \\ Ady_2(t) = [(C - A)y_1(t)z_1(t)]dt, \ \ Cz_1(t) = [(A - B)y_1(t)y_2(t)]dt. \end{gathered} \tag{3.12}$$

Рассмотрим V-функционал Ляпунова—Красовского ($\beta = \text{const} > 0$)

$$V(\psi) = 0.5\,[A(A-C)\psi_{y1}^{\;2}(0) + B(B-C)\psi_{y2}^{\;2}(0)] + 0.5[(A-C)/A]\beta\int_{-\tau}^{0}\psi_{y1}^{\;2}(\theta)d\theta.$$

В области (2.2) при $C < A$, B выполнено условие

$$V(\psi) \geq 0.5A(A-C)\psi_{y1}^{\;2}(0),$$

а ассоциированный с системой (3.12) дифференциальный производящий оператор $\mathbf{L}V(\psi)$ определяется следующим образом:

$$\mathbf{L}V(\psi) = A(A-C)\psi_{y1}(0)\{[(B-C)/A]\psi_{y2}(0)\psi_{z1}(0) + (a/A)\psi_{y1}(0) + (b/A)\psi_{y1}(-\tau)\} +$$

$$+ B(B-C)\psi_{y2}(0)[(C-A)/B]\psi_{y1}(0)\psi_{z1}(0) + 0.5[(A-C)/A][\alpha_1^{\;2}\psi_{y1}^{\;2}(0) + \alpha_2^{\;2}\psi_{y1}^{\;2}(-\tau)] +$$

$$+ 0.5[(A-C)/A]\beta[\psi_{y1}^{\;2}(0) - \psi_{y1}^{\;2}(-\tau)] =$$

$$= (A-C)\{[a + 0.5(\alpha_1^{\;2}/A) + 0.5\beta]\psi_{y1}^{\;2}(0) + b\psi_{y1}(0)\psi_{y1}(-\tau) + 0.5[(\alpha_2^{\;2}/A) - \beta]\psi_{y1}^{\;2}(-\tau)\}.$$

При выполнении условий

$$r + 0.5\beta \leq 0, \;\; (r + 0.5\beta)[(\alpha_2^{\;2}/A) - \beta] \geq 0.5b^2(t), \tag{3.13}$$

в которых $r = a + 0.5\alpha_1^{\;2}/A$, а также при $C < A$, B в области (2.2) для любого постоянного значения $\tau > 0$ имеет место оценка $\mathbf{L}V(\psi) \leq 0$.

Условия (3.13) предполагают требование $\beta \geq \alpha_2^{\;2}/A$. Функция $f(\beta) = (r + 0.5\beta)[(\alpha_2^{\;2}/A) - \beta]$ выпукла вверх и ее максимум достигается при $\beta^* = -r + 0.5\alpha_2^{\;2}/A$; поскольку $r \geq 0$, то $\beta^* \geq \alpha_2^{\;2}/A$. Поэтому, учитывая, что $f(\beta^*) = 0.5[r + 0.5\alpha_2^{\;2}/A]^2$, условия (3.13) можно представить следующим образом:

$$a^* \leq 0, \; b^2(t) \leq a^{*2} \;\; (a^* = a + 0.5\alpha_1^{\;2}/A + 0.5\alpha_2^{\;2}/A); \tag{3.14}$$

второе из этих условий можно заменить эквивалентным условием $|b(t)| \leq -a^*$. Полагая $\beta = \beta^*$ в выбранном функционале $V(\psi)$, заключаем, что при выполнении условий (3.14) "частичное" положение равновесия (3.2) системы (3.12) равномерно y_1-устойчиво по вероятности в целом по ξ_{z1} при любой постоянной величине запаздывания $\tau > 0$.

Заметим, что возможен и другой подход к рассмотрению системы (3.11), допускающий предельный переход от реальных физических шумов к "белому шуму". Такой подход основан на трактовке стохастических систем с запаздыванием как уравнений в форме Стратоновича [44] и допускает последующий переход к соответствующей системе в форме Ито.

Заключение. Для нелинейной нестационарной системы стохастических функционально-дифференциальных уравнений с последействием (запаздыванием), подверженной воздействию случайного процесса "белого" шума, дана поставка задачи устойчивости по отношению к части переменных по вероятности "частичного" нулевого положения равновесия. Значения супремум-нормы тех компонент начальной вектор-функции, которые соответствуют переменным, не определяющим указанное "частичное" положение равновесия, с вероятностью 1 могут быть большими (ограниченными наперед заданным числом) по одной части и произвольными по отношению к их оставшейся части. Выбор такого разбиения определяется в результате поиска компромисса между содержательным смыслом рассматриваемого понятия частичной устойчивости и требованиями к используемым функционалам Ляпунова—Красовского.

Приводятся достаточные условия частичной устойчивости указанного вида в контексте стохастического варианта метода функционалов Ляпунова—Красовского в соответствующей модификации. Наряду с основным V-функционалом Ляпунова—Красовского рассматривается дополнительная (векторная, вообще говоря) вспомогательная $\boldsymbol{\mu}$-функция для корректировки области функционального пространства, в которой строится V-функционал. Целесообразность такого подхода заключается в том, что в результате основной V-функционал, а также ассоциированный с изучаемой системой дифференциальный производящий оператор этого функционала могут быть знакопеременными. Рассмотрены примеры, иллюстрирующие особенности предложенного подхода.

Полученные результаты дополняют на случай стохастических функционально-дифференциальных моделей ранее выполненные исследования по устойчивости инвариантных множеств динамических систем [45—47] на основе метода функций Ляпунова, а также исследования задач стабилизации связей динамических систем [48, 49].

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим произвольное число ε ($0 < \varepsilon < h_1$), произвольный момент времени t_0 и любую допустимую начальную функцию $\mathbf{x}_0 = \boldsymbol{\xi}$, для которой $\mathbf{P}\{\boldsymbol{\xi} \in S_\varepsilon\} = 1$, где $S_\varepsilon = \{\boldsymbol{\xi} \in H_0\colon \|\boldsymbol{\xi}_\mathbf{y}\| < \varepsilon, \|\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{z}1}\| \le L, \|\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{z}2}\| < \infty\}$. Обозначим через τ_ε момент первого достижения процессом $\mathbf{x}(t_0, \boldsymbol{\xi})$ поверхности $|\mathbf{y}_1| = \varepsilon$. Если некоторые траектории этого процесса ни за какое конечное время не достигают поверхности $|\mathbf{y}_1| = \varepsilon$, то для них τ_ε считаем равным ∞. Положим $\tau_\varepsilon(t) = \min\,(\tau_\varepsilon, t)$.

Поскольку для рассматриваемого класса функционалов Ляпунова—Красовского имеет место функциональный аналог формулы Ито, то справедливо соотношение

$$\mathbf{E}[V(\tau_\varepsilon(t), \mathbf{x}_{\tau_\varepsilon(t)}) - V(t_0, \xi)] = \int\limits_{t_0}^{\tau_\varepsilon(t)} \mathbf{E}[\mathbf{L}V(s, \mathbf{x}_s)]ds. \tag{П.1}$$

Поэтому из равенства (П.1) в силу условия (2.6) следует, что

$$\mathbf{E}[V(\tau_\varepsilon(t), \mathbf{x}_{\tau_\varepsilon(t)})] \le \mathbf{E}V(t_0, \xi). \tag{П.2}$$

Если верно неравенство $t > \tau_\varepsilon$ (в этом случае имеем $\tau_\varepsilon(t) = \tau_\varepsilon$), то выполняются соотношения $|\mathbf{y}_1(\tau_\varepsilon(t); t_0, \boldsymbol{\xi})| = |\mathbf{y}_1(\tau_\varepsilon; t_0, \boldsymbol{\xi})| = \varepsilon$. Если же справедливо неравенство $t < \tau_\varepsilon$ (в этом случае имеем $\tau_\varepsilon(t) = t$), то на основании неравенства Чебышева—Маркова и оценки (П.2) находим:

$$\begin{gathered}\mathbf{P}[|\,\mathbf{y}_1(t;\, t_0, \xi)\,| > \varepsilon\,] \le \frac{1}{a(\varepsilon)}\mathbf{E}[a(|\,\mathbf{y}_1(t;\, t_0, \xi)\,|)] \le \\ \le \frac{1}{a(\varepsilon)}\mathbf{E}[a(|\,\mathbf{y}_1(t;\, t_0, \xi)\,| + |\,\boldsymbol{\mu}\,(t, \mathbf{x}(t;\, t_0, \xi))\,|)] \le \frac{1}{a(\varepsilon)}\mathbf{E}[V(t, \mathbf{x}(t_0, \xi))] = \\ = \frac{1}{a(\varepsilon)}\mathbf{E}[V(\tau_\varepsilon(t), \mathbf{x}_{\tau_\varepsilon(t)})] \le \frac{1}{a(\varepsilon)}\mathbf{E}V(t_0, \xi).\end{gathered} \tag{П.3}$$

Поскольку функционал $V(t, \boldsymbol{\psi})$ непрерывен, $V(t, \mathbf{0}) \equiv 0$, а также выполняются условия (2.5), то в случае $\mathbf{P}\{\boldsymbol{\xi} \in S_\delta\} = 1$ (при достаточно малом $\delta > 0$) для всех $t_0 \ge 0$ и для любого заданного числа $L > 0$ предельное соотношение

$$\lim_{\|\xi_\mathbf{y}\| \to 0} \mathbf{E}V(t_0, \xi) = 0 \tag{П.4}$$

верно при $\|\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{z}1}\| \le L$ равномерно по $\|\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{z}2}\| < \infty$.

Поэтому в случае $\mathbf{P}\{\boldsymbol{\xi} \in S_\delta\} = 1$ для всех $t_0 \ge 0$ и для любого заданного числа $L > 0$ на основании неравенств (П.3), (П.4) справедливо предельное соотношение

$$\lim_{\|\xi_\mathbf{y}\| \to 0} \mathbf{P}[\sup_{t > t_0} |\,\mathbf{y}_1(t;\, t_0, \xi)\,| > \varepsilon] = 0,$$

выполняющееся при $\|\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{z}1}\| \le L$ равномерно по $\|\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{z}2}\| < \infty$.

В результате для каждого $t_0 \geq 0$ и для любых сколь угодно малых чисел $\varepsilon > 0$, $\gamma > 0$, а также для любого наперед заданного числа $L > 0$ найдется число $\delta(\varepsilon, \gamma, t_0, L) > 0$, такое, что неравенство (1.2) имеет место для всех $t \geq t_0$ и $\mathbf{P}\{\xi \in S_\delta\} = 1$. Следовательно, при больших значениях $\xi_{\mathbf{z}1}$ в целом по $\xi_{\mathbf{z}2}$ "частичное" положение равновесия $\mathbf{y}_t = \mathbf{0}$ системы (1.1) $\mathbf{y}_1$-устойчиво по вероятности.

Доказательство теоремы 2. При выполнении условий (2.7) в случае $\mathbf{P}\{\xi \in S_\delta\} = 1$ для любого заданного числа $L > 0$ предельное соотношение (П.4) верно при $\|\xi_{\mathbf{z}1}\| \leq L$ равномерно не только по $\|\xi_{\mathbf{z}2}\| < \infty$, но и по $t_0 \geq 0$. В результате для каждого $t_0 \geq 0$ и для любых сколь угодно малых чисел $\varepsilon > 0$, $\gamma > 0$, а также для любого наперед заданного числа $L > 0$ найдется не зависимое от t_0 число $\delta(\varepsilon, \gamma, L) > 0$, такое, что неравенство (1.2) имеет место для всех $t \geq t_0$ и $\mathbf{P}\{\xi \in S_\delta\} = 1$. Следовательно, при больших значениях $\xi_{\mathbf{z}1}$ в целом по $\xi_{\mathbf{z}2}$ "частичное" положение равновесия $\mathbf{y}_t = \mathbf{0}$ системы (1.1) равномерно $\mathbf{y}_1$-устойчиво по вероятности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Колмановский В. Б.*, *Носов В. Р.* Устойчивость и периодические режимы систем с последействием. М.: Наука, 1981. 448 с.
2. *Shaikhet L.* Lyapunov Functionals and Stability of Stochastic Functional Differential Equations. N.Y.: Springer-Verlag, 2013. 342 p.
3. *Fridman E.*, *Shaikhet L.* Simple LMIs for Stability of Stochastic Systems with Delay Term Given by Stieltjes Integral or with Stabilizing Delay // Systems & Control Letters. 2019. V. 124. No. 2. P. 83—91.
4. *Shaikhet L.* About One Method of Stability Investigation for Nonlinear Stochastic Delay Differential Equations // Intern. J. Robust Nonlinear Control. 2021. V. 31. No. 8. P. 2946—2959.
5. *Zong X.*, *Yin G.*, *Li T.*, *Zhang J. F.* Stability of Stochastic Functional Differential Systems Using Degenerate Lyapunov Functionals and Applications // Automatica. 2018. V. 91. P. 197—207.
6. *Nguyen D. H.*, *Yin G.* Stability of Stochastic Functional Differential Equations with Regime-Switching: Analysis Using Dupire's Functional Ito Formula // Potential Analysis. 2020. V. 53. No. 1. P. 247—265.
7. *Yang X.*, *Zhu Q.* Stabilization of Stochastic Functional Differential Systems by Steepest Descent Feedback Controls // IET Control Theory & Appl. 2021. V. 15. No. 6. P. 805—813.
8. *Du N.H.*, *Nguyen D. H.*, *Nguyen N. N.*, *Yin G.* Stability of Stochastic Functional Differential Equations with Random Switching and Applications // Automatica. 2021. V. 125. Art. 109410.
9. *Cont R.*, *Fournié D. A.* Functional Ito Calculus and Stochastic Integral Representation of Martingales // Annals of Probability. 2013. V. 41. No. 1. P. 109—133.
10. *Румянцев В. В.* Об устойчивости движения по отношению к части переменных // Вестн. МГУ. Сер. Математика, механика, физика, астрономия, химия. 1957. № 4. С. 9—16.
11. *Воротников В. И.* Частичная устойчивость и управление: состояние проблемы и перспективы развития // АиТ. 2005. № 4. С. 3—59.
12. *Caraballo T.*, *Mchiri L.*, *Rhaima M.* Partial Practical Exponential Stability of Neutral Stochastic Functional Differential Equations with Markovian Switching // Mediterranean J. Mathematics. 2021. V. 18. No. 4. P. 1—26.
13. *Li J.*, *Ren Y.* Practical Stability in Relation to a Part of Variables of Stochastic Pantograph Differential Equations // Intern. J. Control. 2022. V. 95. No. 12. P. 3196—3201.
14. *Kadiev R. I.*, *Ponosov A.* Partial Stability of Linear Stochastic Functional Differential Equations and the *W*-Transform // Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A. Math. Anal. 2014. V. 21. No. 1. P. 1—35.
15. *Кадиев Р. И.* Устойчивость относительно начальных данных по части переменных решений линейных импульсных систем дифференциальных уравнений Ито с последействием // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 1. С. 20—34.
16. *Mohammed S. E.A.* Stochastic Functional Differential Equations. (Research Notes in Mathe-matics, V. 99). Pitman Advanced Publishing Program: Boston, London, Melbourne, 1984. 250 p.
17. *Mao X. R.* Stochastic Differential Equations and Applications. 2nd ed. Oxford: Woodhead Publ., 2008. 440 p.
18. *Xu D.*, *Yang Z.*, *Huang Y.* Existence-Uniqueness and Continuation Theorems for Stochastic Functional Differential Equations // J. Diff. Equations. 2008. V. 245. No. 6. P. 1681—1703.
19. *Vorotnikov V. I.* Partial Stability and Control. Boston: Birkhauser, 1998. 448 p.
20. *Воротников В. И.*, *Мартышенко Ю. Г.* Об устойчивости по части переменных "частичных" положений равновесия систем с последействием // Мат. заметки. 2014. Т. 96. Вып. 4. С. 496—503.
21. *Воротников В. И.* К частичной устойчивости и детектируемости функционально-дифференциальных систем с последействием // АиТ. 2020. № 2. С. 3—17.
22. *Shiriaev A.* S. The Notion of *V*-Detectability and Stabilization of Invariant Sets of Nonlinear Systems // Systems & Control Letters. 2000. V. 39. No. 5. P. 327—338.

23. *Ingalls B. P.*, *Sontag E. D.*, *Wang Y.* Measurement to Error Stability: a Notion of Partial Detectability for Nonlinear Systems // Proc. 41th IEEE Conf. on Decision and Control. Las Vegas, Nevada, 2002. P. 3946—3951.
24. *Дашковский С. Н.*, *Ефимов Д. В.*, *Сонтаг Э. Д.* Устойчивость от входа к состоянию и смежные свойства систем // АиТ. 2011. № 8. С. 3—40.
25. *Rajpurohit T.*, *Haddad W. M.* Stochastic Finite-Time Partial Stability, Partial-State Stabilization, and Finite-Time Optimal Feedback Control // Math. Control, Signals, Syst. 2017. V. 29. № 2. Art. 10.
26. *Rajpurohit T.*, *Haddad W. M.* Partial-State Stabilization and Optimal Feedback Control for Stochastic Dynamical Systems // J. Dynam. Syst., Measurement, and Control. 2017. V. 139. No. 9. Art. DS-15-1602.
27. *Воротников В. И.*, *Мартышенко Ю.* Г. К задаче частичной устойчивости по вероятности нелинейных стохастических систем // АиТ. 2019. № 5. С. 86—98.
28. *Воротников В. И.* Об устойчивости и устойчивости по части переменных “частичных” положений равновесия нелинейных динамических систем // Докл. РАН. 2003. Т. 389. № 3. С. 332—337.
29. *Воротников В. И.*, *Мартышенко Ю. Г.* К теории частичной устойчивости нелинейных динамических систем // Изв. РАН. ТиСУ. 2010. Т. 51. Вып. 5. С. 23—31.
30. *Воротников В. И.*, *Мартышенко Ю.* Г. Об одном подходе к анализу устойчивости “частичных” положений равновесия нелинейных дискретных систем // Изв. РАН. ТиСУ. 2022. Т. 63. Вып. 3. С. 88—100.
31. *Воротников В. И.*, *Мартышенко Ю.* Г. К задаче частичной устойчивости нелинейных дискретных стохастических систем // АиТ. 2021. № 9. С. 116—132.
32. *Воротников В. И.*, *Румянцев В. В.* Устойчивость и управление по части координат фазового вектора динамических систем: теория, методы и приложения. М.: Научный мир, 2001. 320 с.
33. *Шаров В. Ф.* Устойчивость и стабилизация стохастических систем по отношению к части переменных // АиТ. 1978. № 11. С. 63—71.
34. *Ignatyev O.* Partial Asymptotic Stability in Probability of Stochastic Differential Equations // Statist. Probab. Lett. 2009. V. 79. No. 5. P. 597—601.
35. *Zuyev A.*, *Vasylieva I.* Partial Stabilization of Stochastic Systems with Application to Rota-ting Rigid Bodies // IFAC-PapersOnLine. 2019. V. 52. No. 16. P. 162—167.
36. *Sultanov O.* Capture into Parametric Autoresonance in the Presence of Noise // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2019. V. 75. P. 14—21.
37. *Sultanov O. A.* Bifurcations of Autoresonant Modes in Oscillating Systems with Combined Excitation // Studies in Applied Mathematics. 2020. V. 144. No. 2. P. 213—241.
38. *Kao Y.*, *Wang C.*, *Zha F.*, *Cao H.* Stability in Mean of Partial Variables for Stochastic Reaction-Diffusion Systems with Markovian Switching // J. Franklin Institute. 2014. V. 351. No. 1. P. 500—512.
39. *Socha L.*, *Zhu Q. X.* Exponential Stability with Respect to Part of the Variables for a Class of Nonlinear Stochastic Systems with Markovian Switching // Math. Comp. Simul. 2019. V. 155. P. 2—14.
40. *Socha L.* Stability and Positivity with Respect to Part of the Variables for Positive Markovian Jump Systems // Bull. Polish Acad. Sci.: Tech. Sci. 2019. V. 67. No. 4. P. 769—775.
41. *Хрусталев М. М.*, *Онегин Е. Е.* Необходимые и достаточные условия в задаче оптимальной стабилизации квазилинейных стохастических систем // АиТ. 2019. № 7. С. 89—104.
42. *Caraballo T.*, *Ezzine F.*, *Hammami M. A.*, *Mchiri L.* Practical Stability with Respect to a Part of Variables of Stochastic Differential Equations // Stochastics. 2021. V. 93. No. 5. P. 647—664.
43. *Caraballo T.*, *Ezzine F.*, *Hammami M. A.* Partial Stability Analysis of Stochastic Differential Equations with a General Decay Rate // J. Engineering Mathematics. 2021. V. 130. No. 1. P. 1—17.
44. *Küchler U.*, *Mensch B.* Langevins Stochastic Differential Equation Extended by a Time-Delayed Term // Stochastics and Stochastics Reports. 1992. V. 40. № 1-2. P. 23—42.
45. *Зубов В. И.* Проблема устойчивости процессов управления. Л.: Судостроение, 1980. 256 с.
46. *Галиуллин А.* С., *Мухаметзянов И.* А., *Мухарлямов Р. Г. и др.* Построение систем программного движения. М.: Наука, 1971. 352 с.
47. *Ефимов Д. В.* Робастное и адаптивное управление нелинейными колебаниями. СПб.: Наука, 2005. 314 с.
48. *Мухарлямов Р. Г.* Моделирование процессов управления, устойчивость и стабилизация систем с программными связями // Изв. РАН. ТиСУ. 2015. Т. 56. Вып. 1. С. 15—28.
49. *Мухарлямов Р. Г.* Управление динамикой системы с дифференциальными связями // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. Т. 60. Вып. 4. С. 16—28.