ФИЗИКА ЗЕМЛИ, 2024, № 6, с. 178–186

УДК 537.84+517.9+519.63

АСИМПТОТИКА ВЕТВЛЕНИЯ СЕМЕЙСТВ НАИМЕНЕЕ УСТОЙЧИВЫХ МАГНИТНЫХ МОД БЛОХОВСКОГО ТИПА

В. А. Желиговский

Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН, г. Москва, Россия

E-mail: vlad@mitp.ru

Поступила в редакцию 26.02.2024 г.

После доработки 04.03.2024 г.

Принята к публикации 27.04.2024 г.

Рассмотрена кинематическая генерация блоховских магнитных мод пространственно-периодическим течением электропроводной жидкости. Блоховская мода — это векторное поле вида произведения трехмерного поля, имеющего периодичность течения, на гармонику Фурье $e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}$ с произвольным волновым вектором $\mathbf{q}$. Проведенные ранее вычисления показали, что моды, имеющие максимальный по вектору $\mathbf{q}$ инкремент роста, выстраиваются в семейства, гладко параметризованные величиной молекулярной магнитной диффузии. В части семейств максимальный инкремент достигается для т.н. полуцелых $\mathbf{q}$, у которых все компоненты целые или полуцелые числа, постоянных для всего семейства. От таких семейств могут ответвляться другие семейства, в которых оптимальное $\mathbf{q}$ мод семейства гладко изменяется. В настоящей работе для таких ответвляющихся семейств построено асимптотическое разложение составляющих их мод, ассоциированных с ними собственных значений оператора магнитной индукции и оптимальных $\mathbf{q}$ в виде степенных рядов по параметру $\vartheta = (\eta_0 - \eta)^{1/2}$. Здесь η_0 — магнитная диффузия, при которой происходит ветвление. В данной работе предполагается, что моды в семействе, от которого происходит ответвление, отвечают ненулевому постоянному полуцелому волновому вектору $\mathbf{q}$. Показано, что эти асимптотические разложения существенно отличаются от аналогичных разложений, построенных нами ранее для случая генерации магнитного поля центрально-симметричным течением, а ответвление происходит от семейства короткомасштабных (отвечающих $\mathbf{q} = 0$) нейтральных (ассоциированных с нулевым собственным значением оператора магнитной индукции) мод.

Ключевые слова: кинематическое магнитное динамо, генерация магнитного поля, режим Блоха, асимптотическое разложение в степенной ряд, ветвление семейства.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0002333724060122, **EDN:** RFUNWL

ВВЕДЕНИЕ

В статье [Желиговский, Чертовских, 2020] и в серии работ [Chertovskih, Zheligovsky, 2023a–2023c] были численно и аналитически рассмотрены три задачи линейной устойчивости пространственно-периодических стационарных состояний по отношению ко блоховским модам неустойчивости: задача гидродинамической устойчивости течений, задача кинематического динамо и полная задача магнитогидродинамической (МГД) устойчивости стационарных МГД состояний. Блоховская мода — это векторное поле той же пространственной периодичности, что и возмущаемое состояние, амплитудно-модулированное гармоникой Фурье $e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}$. Здесь волновой вектор $\mathbf{q}$ — произвольный постоянный действительный вектор, модули всех компонент которого меньше единицы. По-видимому, впервые поля такого вида были рассмотрены в работе [Bloch, 1929] как решения уравнения Шредингера с пространственно-периодическим потенциалом. Впоследствии их использовали при математическом анализе явлений α-эффекта и вихревой (турбулентной) диффузии в различных МГД системах (см. работы [Желиговский, 2010; Zheligovsky, 2011]), где длина вектора $\mathbf{q}$ предполагалась малой, и по этому параметру проводили асимптотическое разложение мод неустойчивости и инкрементов их роста (точнее, собственных значений соответствующего оператора линейной устойчивости).

Вычисления, представленные в работе [Желиговский, Чертовских, 2020] для задачи кинематического динамо и в работе [Chertovskih, Zheligovsky, 2023b] для всех трех указанных задач линейной устойчивости, показали, что наименее устойчивые моды возмущений отвечают волновым векторам **q**, длина которых, как правило, достаточно велика (в диапазоне 0.3–0.7 при достаточно малых параметрах диффузии), и она не демонстрирует тенденции к уменьшению при уменьшении молекулярных магнитной диффузии η или вязкости ν. (Здесь и далее под наименее устойчивыми модами возмущения мы понимаем блоховские моды, имеющие максимальный по **q** инкремент роста.) Это означает, что если исходное гидродинамическое или МГД состояние и обладает существенным разделением пространственных масштабов, то при дальнейшей эволюции это разделение разрушается каскадом неустойчивостей рассматриваемого типа. Таким образом, показано, что описание воздействия мелкомасштабных структур на крупномасштабные посредством стандартных операторов α-эффекта и вихревой диффузии, выведенных в предположении существенного разделения пространственных масштабов, (см. монографию [Краузе, Рэдлер, 1984]; краткое, но четкое и достаточно полное введение в этот круг вопросов приведено в статье [Rädler, 2007]) логически внутренне противоречиво. Возникает задача о более точном описании этих явлений с учетом возникающего нелинейного каскада неустойчивостей.

В цитированных выше работах была рассмотрена устойчивость стационарных соленоидальных пространственно-периодических состояний, сгенерированных в виде рядов Фурье с псевдослучайными коэффициентами и энергетическими спектрами, затухающими по разным законам: экспоненциальному, степенному (как колмогоровский спектр) и типа крупных вихрей (где присутствуют только гармоники с волновыми числами не более 2). Были рассмотрены как центрально-симметричные стационарные состояния (в них возникает вихревая диффузия), так и не симметричные (в них возникает α-эффект). На определенном интервале величин параметра молекулярной диффузии вычислялись блоховские моды неустойчивости, ассоциированные с глобально максимальным по блоховскому волновому вектору (т.е. по всем **q**) инкрементом роста. Такие моды составляют семейства (ветви), параметризованные величиной молекулярной диффузии, в которых моды и их инкременты роста гладко зависят от диффузионного параметра (также были вычислены некоторые продолжения по параметру таких семейств мод, в которых сохранялось свойство локальной по **q** максимальности инкремента, но инкременты переставали быть глобально максимальными).

В работе [Желиговский, Чертовских, 2020] для задачи кинематического динамо, а в работе [Chertovskih, Zheligovsky, 2023a] для всех трех рассмотренных задач линейной устойчивости было доказано, что для блоховских волновых векторов **q**, каждая компонента которых — целое или полуцелое число (мы называем такие **q** полуцелыми), выполнено необходимое условие

$$\partial\gamma\,/\,\partial q^m = 0 \qquad (1)$$

экстремальности по **q** инкремента роста γ моды при условии, что возмущаемое состояние $(\mathbf{V},\mathbf{B})$ центрально-симметрично, и/или если мода ассоциирована с действительным собственным значением соответствующего оператора линейной устойчивости. В расчетах работы [Chertovskih, Zheligovsky, 2023b] найдено, что для некоторых возмущаемых состояний действительно существуют семейства мод с глобально максимальными инкрементами роста, отвечающие полуцелым **q**, одинаковым для всей ветви. При этом на границе таких интервалов ν или η к семейству наименее устойчивых мод, отвечающих полуцелому **q**, иногда присоединяется семейство мод с глобально или локально максимальными инкрементами роста, отвечающих изменяющимся в присоединяющемся семействе не полуцелым **q**.

В работе [Chertovskih, Zheligovsky, 2023c] для задачи кинематической генерации магнитного поля центрально-симметричным течением была рассмотрена асимптотика семейства наименее устойчивых блоховских магнитных мод, ответвляющихся от семейства наименее устойчивых нейтральных (ассоциированных с нулевым собственным значением оператора магнитной индукции) короткомасштабных (отвечающих $\mathbf{q}=0$) мод. Пример такого ветвления приведен в работе [Chertovskih, Zheligovsky, 2023b] на рис. 14a, 14b (на границе между интервалами II и III молекулярной магнитной диффузии). Было показано, что наименее устойчивые моды в ответвляющемся семействе, их собственные значения и блоховские волновые векторы, для которых реализуются максимальные инкременты роста этих мод, могут быть разложены в асимптотические степенные ряды по параметру $\vartheta=(\eta_0-\eta)^{1/2}$. Здесь η_0 — магнитная диффузия, при которой происходит ветвление; для нее выполняется условие, что при этой молекулярной магнитной диффузии оператор вихревой магнитной диффузии имеет нулевое собственное значение. Указанное разложение собственных значений магнитных мод начинается с порядка ϑ^2, но коэффициенты членов этого разложения порядков ϑ^2 и ϑ^3 мнимые, и разложения инкрементов роста блоховских магнитных мод в ответвляющемся семействе начинаются с ϑ^4. Разложения блоховских волновых векторов, для которых реализуются максимальные инкременты роста, начинаются с члена порядка ϑ. Эти особенности рассмотренных в работе [Chertovskih, Zheligovsky, 2023b] асимптотических разложений связаны с тем, что в ситуации общего положения ядро оператора магнитной индукции трехмерно – его базис всегда включает три коротмасштабные (для $\mathbf{q}=0$) магнитные моды [Арнольд и др., 1982].

В данной работе рассмотрено, также в задаче кинематического динамо, аналогичное степенное асимптотическое разложение семейства наименее устойчивых мод, ответвляющегося от семейства наименее устойчивых магнитных мод, которые отвечают полуцелому $\mathbf{q}\neq 0$. Примеры такого ветвления приведены в работе [Chertovskih, Zheligovsky, 2023b] на рис. 10a, 10b и рис. 13a, 13b для несимметричного генерирующего течения, и на рис. 15a, 15b для центрально-симметричного (на границе между интервалами I и II во всех трех случаях). В следующем разделе описана постановка задачи, последующие разделы посвящены рассмотрению систем уравнений, возникающих в порядках ϑ^0, ϑ и ϑ^2, и завершают статью заключение и комментарии.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Мы изучаем генерацию магнитного поля пространственно-периодическим стационарным течением с полем скорости $\mathbf{V}(\mathbf{x})$. Магнитные моды $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ удовлетворяют уравнению на собственные значения для оператора магнитной индукции:

$$\mathcal{M}\mathbf{B}=\lambda\mathbf{B},$$

$$\mathcal{M}:\mathbf{B}\mapsto\eta\nabla^2\mathbf{B}+\nabla\times(\mathbf{V}\times\mathbf{B}). \qquad (2)$$

Электропроводная жидкость считается несжимаемой, магнитное поле соленоидально:

$$\nabla\cdot\mathbf{V}=\nabla\cdot\mathbf{B}=0. \qquad (3)$$

Рассматриваются магнитные моды блоховского вида:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x})=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}\mathbf{b}(\mathbf{x}), \qquad (4)$$

причем периодичность поля $\mathbf{b}$ такая же, как и у $\mathbf{V}$; для простоты, считаем ячейку периодичности кубом $\mathbb{T}^3=[-\pi,\pi]^3$. Мы ищем волновой вектор $\mathbf{q}$, при котором для данного η мода (4) имеет максимальный инкремент роста:

$$\gamma=\max_{\mathbf{q}}\ \mathrm{Re}\ \lambda(\mathbf{q}).$$

Подставив выражение (4) в (2), получаем задачу на собственные значения

$$\mathcal{D}_{\mathbf{q}}\mathbf{b}=\lambda\mathbf{b} \qquad (5)$$

для модифицированного оператора

$$\mathcal{D}_{\mathbf{q}}:\mathbf{b}\mapsto\eta\Delta_{\mathbf{q}}\mathbf{b}+\nabla\times(\mathbf{V}\times\mathbf{b})+\mathrm{i}\mathbf{q}\times(\mathbf{V}\times\mathbf{b}).$$

Сопряженный к нему оператор имеет вид:

$$\mathcal{D}^*_{\mathbf{q}}:\mathbf{b}\mapsto\eta\Delta_{\mathbf{q}}\mathbf{b}-\mathbf{V}\times(\nabla\times\mathbf{b}+\mathrm{i}\mathbf{q}\times\mathbf{b}),$$

где

$$\Delta_{\mathbf{q}}:\mathbf{b}\mapsto\nabla^2\mathbf{b}+2\mathrm{i}(\mathbf{q}\cdot\nabla)\mathbf{b}-|\mathbf{q}|^2\mathbf{b}$$

– самосопряженный модифицированный оператор Лапласа. Сопряженность определена в смысле обычного скалярного произведения

$$\langle\langle\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2\rangle\rangle=\langle\mathbf{b}_1\cdot\overline{\mathbf{b}_2}\rangle\equiv(2\pi)^{-3}\int_{\mathbb{T}^3}\mathbf{b}_1(\mathbf{x})\cdot\overline{\mathbf{b}_2}(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}$$

в пространстве Лебега $\mathbb{L}_2(\mathbb{T}^3)$.

При вычислении максимального инкремента γ достаточно рассматривать блоховские волновые векторы $\mathbf{q}$ в кубе $|q^m|\leq 1/2$, т.к. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}\mathbf{b}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{q}-\mathbf{n})\cdot\mathbf{x}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}}\mathbf{b}$, а поле $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}}\mathbf{b}$ имеет периодичность течения $\mathbf{V}$ для любого вектора $\mathbf{n}$ с целочисленными компонентами. Более того, комплексное сопряжение уравнения (5) показывает, что моды (4) для противоположных $\mathbf{q}$ имеют одинаковые инкременты роста, поэтому максимальный по $\mathbf{q}$ инкремент достаточно найти в параллелепипеде

$$\{\mathbf{q}\,|\,0\leq q^1\leq 1/2,-1/2\leq q^2\leq 1/2,-1/2\leq q^3\leq 1/2\}.$$

Если λ – собственное значение $\mathcal{D}_{\mathbf{q}}$ (5), то комплексно-сопряженное число $\overline{\lambda}$ – собственное значение сопряженного оператора $\mathcal{D}^*_{\mathbf{q}}$:

$$\mathcal{D}^*_{\mathbf{q}}\mathbf{b}^*=\overline{\lambda}\mathbf{b}^*. \qquad (6)$$

В дальнейшем считаем, что собственные значения $\lambda(\mathbf{q})$ при $\mathbf{q}\neq 0$ имеют кратность 1. Мы нормируем собственные функции условием

$$\langle\langle\mathbf{b},\mathbf{b}^*\rangle\rangle=1 \qquad (7)$$

(это всегда возможно, поскольку $\langle\langle \mathbf{b}, \mathbf{b}^* \rangle\rangle \neq 0$ в силу двойственности базисов взаимно сопряженных операторов $\mathcal{D}_{\mathbf{q}}$ и $\mathcal{D}^*_{\mathbf{q}}$; какова индивидуальная нормировка $\mathbf{b}$ и $\mathbf{b}^*$, для наших целей значения не имеет).

Градиент $\lambda(\mathbf{q})$ тогда вычисляется с использованием биортогональности собственных функций линейного оператора и сопряженного к нему. Дифференцируя (5) по q^m, получим:

$$\left(\mathcal{D}_{\mathbf{q}} - \lambda\right)\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial q^m} + 2\eta\left(-q^m \mathbf{b} + \mathrm{i}\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial x_m}\right) +$$
$$+ \mathrm{i}\mathbf{e}_m \times (\mathbf{V} \times \mathbf{b}) = \frac{\partial \lambda}{\partial q^m}\mathbf{b},$$

где $\mathbf{e}_m$ – единичные орты декартовой системы координат. Скалярно умножив это уравнение на $\mathbf{b}^*$, получим с использованием (7)

$$\frac{\partial \gamma}{\partial q^m} = -2\eta q_m - \mathrm{Im}\langle\langle 2\eta \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial x_m} + \mathbf{e}_m \times (\mathbf{V} \times \mathbf{b}), \mathbf{b}^* \rangle\rangle,$$

поэтому условие максимальности инкремента (1) принимает вид:

$$2\eta\left(\mathbf{q} + \sum_m \mathrm{Im}\langle \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial x_m} \cdot \overline{\mathbf{b}^*} \rangle \mathbf{e}_m\right) + \mathrm{Im}\langle (\mathbf{V} \times \mathbf{b}) \times \overline{\mathbf{b}^*} \rangle = 0. \quad (8)$$

Пусть при критической величине молекулярной магнитной диффузии η_0 от семейства наименее устойчивых магнитных мод, отвечающих полуцелому блоховскому волновому вектору $\mathbf{q}_0 \neq 0$, ответвляется другое семейство наименее устойчивых магнитных мод. Для определенности считаем, что ответвившееся семейство существует при $\eta < \eta_0$. Согласно численным результатам [Chertovskih, Zheligovsky, 2023b], при приближении к точке ветвления компоненты оптимального блоховского волнового вектора, при котором реализуются максимальные инкременты роста этих мод, отличаются от $\mathbf{q}_0$ на величины порядка $\vartheta = (\eta_0 - \eta)^{1/2}$. Это указывает на возможность разложения мод $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ в ответвившемся семействе, их собственных значений λ, оптимального блоховского волнового вектора $\mathbf{q}$ и мод сопряженного оператора $\mathbf{b}^*$ в асимптотические степенные ряды по этому параметру:

$$\mathbf{b} = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{b}_j \vartheta^j, \qquad \mathbf{b}^* = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{b}^*_j \vartheta^j,$$
$$\lambda = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j \vartheta^j, \qquad \mathbf{q} = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{q}_j \vartheta^j. \quad (9)$$

Для вывода условия соленоидальности блоховской моды $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}\mathbf{b}(\mathbf{x})$ в терминах разложения (9) подставляем его в (3). В порядке ϑ^j находим:

$$\nabla \cdot \mathbf{b}_j + \mathrm{i}\sum_{k=0}^{j} \mathbf{q}_k \cdot \mathbf{b}_{j-k} = 0. \quad (10)$$

Подставляя ряды (9) и соотношение $\eta = \eta_0 - \vartheta^2$ в уравнения (5) и (6) и в условия максимальности инкремента (8) и нормировки (7), мы получаем в порядках ϑ^j иерархию систем уравнений относительно слагаемых рядов (9), которые последовательно решаем в порядке возрастания степеней j.

УРАВНЕНИЯ В ПОРЯДКЕ ϑ^0

Система уравнений, возникающая в порядке ϑ^0, имеет вид:

$$\mathcal{D}_0 \mathbf{b}_0 = \lambda_0 \mathbf{b}_0, \quad (11.1)$$

$$\mathcal{D}^*_0 \mathbf{b}^*_0 = \overline{\lambda_0} \mathbf{b}^*_0, \quad (11.2)$$

$$2\eta_0\left(\mathbf{q}_0 + \sum_m \mathrm{Im}\frac{\partial \mathbf{b}_0}{\partial x_m} \cdot \overline{\mathbf{b}^*_0} \mathbf{e}_m\right) + \mathrm{Im}(\mathbf{V} \times \mathbf{b}_0) \times \overline{\mathbf{b}^*_0} = 0, \quad (11.3)$$

$$\langle\langle \mathbf{b}_0, \mathbf{b}^*_0 \rangle\rangle = 1, \quad (11.4)$$

где

$$\mathcal{D}_0 : \mathbf{b} \mapsto \eta_0 \Delta_{\mathbf{q}_0} \mathbf{b} + \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{b}) + \mathrm{i}\mathbf{q}_0 \times (\mathbf{V} \times \mathbf{b}), \quad (12)$$
$$\mathcal{D}^*_0 : \mathbf{b} \mapsto \eta_0 \Delta_{\mathbf{q}_0} \mathbf{b} - \mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{b} + \mathrm{i}\mathbf{q}_0 \times \mathbf{b}).$$

Эти уравнения не несут новой информации, они только обеспечивают непрерывное причленение ответвляющегося семейства к семейству, отвечающему полуцелому $\mathbf{q}_0$ (мы не рассматриваем здесь случай границы интервала молекулярной диффузии, на котором максимальный инкремент достигается в определенном семействе, а после перехода через границу – в другом, причем на границе максимальный инкремент в двух этих семействах достигается на разных блоховских волновых векторах $\mathbf{q}$).

По построению (и также это можно легко проверить непосредственно)

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{q}_0\cdot\mathbf{x}} \mathcal{M}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{q}_0\cdot\mathbf{x}}\mathbf{b}\right) = \mathcal{D}_0 \mathbf{b}$$

для любого векторного поля $\mathbf{b}$, поэтому умножение уравнения (11.1) на $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{q}_0\cdot\mathbf{x}}$ и взятие дивергенции дает:

$$\eta_0 \nabla^2\left(\nabla \cdot \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{q}_0\cdot\mathbf{x}}\mathbf{b}_0\right)\right) = \lambda_0 \nabla \cdot \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{q}_0\cdot\mathbf{x}}\mathbf{b}_0\right).$$

Следовательно, $\nabla \cdot \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{q}_0\cdot\mathbf{x}}\mathbf{b}_0\right) = 0$, если только λ_0/η_0 не есть собственное значение лапласиана для скалярных полей с соответствующей пространственной квазипериодичностью (эти собственные значения равны $-|\mathbf{n}+\mathbf{q}_0|^2$, где $\mathbf{n}$ – произвольный вектор с целочисленными компонентами). В дальнейшем полагаем, что λ_0 удовлетворяет этому условию (в частности, оно выполнено, когда λ_0 не действительно или $\lambda_0 \geq 0$), и поэтому выполнено модифицированное условие соленоидальности (10) для $j=0$.

Применяя теорему об альтернативе Фредгольма, можно доказать, что уравнения

$$\left(\mathcal{D}_0-\lambda_0\right)\mathbf{b}=\mathbf{f} \text{ и } \left(\mathcal{D}_0^*-\overline{\lambda_0}\right)\mathbf{b}^*=\mathbf{f}^*$$

имеют решения тогда и только тогда, когда

$$\langle\langle\mathbf{f},\mathbf{b}_0^*\rangle\rangle=0, \tag{13.1}$$

$$\langle\langle\mathbf{f}^*,\mathbf{b}_0\rangle\rangle=0, \tag{13.2}$$

соответственно. При этом решение $\mathbf{b}$ определяется с точностью до произвольного слагаемого, пропорционального $\mathbf{b}_0$, а $\mathbf{b}^*$ с точностью до произвольного слагаемого, пропорционального $\mathbf{b}_0^*$.

УРАВНЕНИЯ В ПОРЯДКЕ ϑ

В порядке ϑ мы получаем из (5), (6), (8) и (7) следующую систему уравнений:

$$\left(\mathcal{D}_0-\lambda_0\right)\mathbf{b}_1+2\eta_0\left(\mathrm{i}\left(\mathbf{q}_1\cdot\nabla\right)\mathbf{b}_0-\left(\mathbf{q}_0\cdot\mathbf{q}_1\right)\mathbf{b}_0\right)+ +\mathrm{i}\mathbf{q}_1\times\left(\mathbf{V}\times\mathbf{b}_0\right)=\lambda_1\mathbf{b}_0, \tag{14.1}$$

$$\left(\mathcal{D}_0^*-\overline{\lambda_0}\right)\mathbf{b}_1^*+2\eta_0\left(\mathrm{i}\left(\mathbf{q}_1\cdot\nabla\right)\mathbf{b}_0^*-\left(\mathbf{q}_0\cdot\mathbf{q}_1\right)\mathbf{b}_0^*\right)- -\mathbf{V}\times\left(\mathrm{i}\mathbf{q}_1\times\mathbf{b}_0^*\right)=\overline{\lambda}_1\mathbf{b}_0^*, \tag{14.2}$$

$$2\eta_0\left(\mathbf{q}_1+\mathrm{Im}\sum_m\langle\frac{\partial\mathbf{b}_0}{\partial x_m}\cdot\overline{\mathbf{b}_1^*}+\frac{\partial\mathbf{b}_1}{\partial x_m}\cdot\overline{\mathbf{b}_0^*}\rangle\mathbf{e}_m\right)+ +\mathrm{Im}\langle\left(\mathbf{V}\times\mathbf{b}_0\right)\times\overline{\mathbf{b}_1^*}+\left(\mathbf{V}\times\mathbf{b}_1\right)\times\overline{\mathbf{b}_0^*}\rangle=0, \tag{14.3}$$

$$\langle\langle\mathbf{b}_0,\mathbf{b}_1^*\rangle\rangle+\langle\langle\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_0^*\rangle\rangle=0. \tag{14.4}$$

Скалярно умножив (14.1) на $\mathbf{b}_0^*$ и (14.2) на $\mathbf{b}_0$, найдем:

$$\lambda_1=\langle\langle 2\mathrm{i}\eta_0\left(\mathbf{q}_1\cdot\nabla\right)\mathbf{b}_0+\mathrm{i}\mathbf{q}_1\times\left(\mathbf{V}\times\mathbf{b}_0\right),\mathbf{b}_0^*\rangle\rangle-2\eta_0\left(\mathbf{q}_0\cdot\mathbf{q}_1\right), \tag{15.1}$$

$$\overline{\lambda_1}=\langle\langle 2\mathrm{i}\eta_0\left(\mathbf{q}_1\cdot\nabla\right)\mathbf{b}_0^*-\mathbf{V}\times\left(\mathrm{i}\mathbf{q}_1\times\mathbf{b}_0^*\right),\mathbf{b}_0\rangle\rangle-2\eta_0\left(\mathbf{q}_0\cdot\mathbf{q}_1\right). \tag{15.2}$$

Поскольку, как легко проверить, для любых полей $\mathbf{b}_0$ и $\mathbf{b}_0^*$ правые части (15) – взаимно комплексно-сопряженные числа, два равенства (15) эквивалентны. Скалярно умножив (11.3) на $\mathbf{q}_1$ и сложив результат с (15.1), находим, что $\mathrm{Re}\lambda_1=0$.

После подстановки (15) в (14.1) и (14.2) находим, что неоднородные члены этих уравнений являются линейными функциями компонент q_1^m вектора $\mathbf{q}_1$. Поэтому решения уравнений (14.1) и (14.2) имеют вид:

$$\mathbf{b}_1=\sum_m\boldsymbol{\zeta}_{1m}q_1^m+\mu_1\mathbf{b}_0, \qquad \mathbf{b}_1^*=\sum_m\boldsymbol{\zeta}_{1m}^*q_1^m+\mu_1^*\mathbf{b}_0^*, \tag{16}$$

где $\boldsymbol{\zeta}_{1m}$ и $\boldsymbol{\zeta}_{1m}^*$ – решения вспомогательных задач:

$$\left(\mathcal{D}_0-\lambda_0\right)\boldsymbol{\zeta}_{1m}+2\mathrm{i}\eta_0\partial\mathbf{b}_0/\partial x_m+\mathrm{i}\mathbf{e}_m\times\left(\mathbf{V}\times\mathbf{b}_0\right)- -\langle\langle 2\mathrm{i}\eta_0\partial\mathbf{b}_0/\partial x_m+\mathrm{i}\mathbf{e}_m\times\left(\mathbf{V}\times\mathbf{b}_0\right),\mathbf{b}_0^*\rangle\rangle\mathbf{b}_0=0,$$

$$\left(\mathcal{D}_0^*-\overline{\lambda_0}\right)\boldsymbol{\zeta}_{1m}^*+2\mathrm{i}\eta_0\partial\mathbf{b}_0^*/\partial x_m-\mathbf{V}\times\left(\mathrm{i}\mathbf{e}_m\times\mathbf{b}_0^*\right)- -\langle\langle 2\mathrm{i}\eta_0\partial\mathbf{b}_0^*/\partial x_m-\mathbf{V}\times\left(\mathrm{i}\mathbf{e}_m\times\mathbf{b}_0^*\right),\mathbf{b}_0\rangle\rangle\mathbf{b}_0^*=0$$

(проверка выполнения условий разрешимости (13) для этих уравнений тривиальна), а μ_1 и μ_1^* – произвольные константы. Подставляя выражения (16) в (14.4), находим:

$$\overline{\mu_1^*}+\mu_1=-\sum_m\left(\langle\langle\mathbf{b}_0,\boldsymbol{\zeta}_{1m}^*\rangle\rangle+\langle\langle\boldsymbol{\zeta}_{1m},\mathbf{b}_0^*\rangle\rangle\right)q_1^m. \tag{17}$$

Поскольку нет необходимости нормировать собственные функции $\mathbf{b}$ и $\mathbf{b}^*$ в отдельности, других ограничений на константы μ_1 и μ_1^* нет. Однако в дальнейшем алгебра несколько упрощается, если выбрать μ_1 из условия

$$\langle\langle\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_0^*\rangle\rangle=0; \tag{18.1}$$

тогда μ_1^* находим из соотношения (17), а (14.4) влечет

$$\langle\langle\mathbf{b}_0,\mathbf{b}_1^*\rangle\rangle=0. \tag{18.2}$$

Подстановка выражений (16) и (17) в уравнение (14.3) приводит его к виду однородного уравнения

$$\mathcal{E}\mathbf{q}_1=0 \tag{19}$$

для линейного оператора $\mathcal{E}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$. (Отметим, что константы μ_1 и μ_1^* входят в него только в виде суммы $\overline{\mu_1^*}+\mu_1$, которая определяется соотношением (17).) Это уравнение имеет решение $\mathbf{q}_1\neq 0$, если определитель матрицы (которую мы также обозначим $\mathcal{E}$) этого оператора равен 0. Коэффициенты этой матрицы определяются параметром η_0 и полями $\mathbf{b}_0$, $\mathbf{b}_0^*$, $\boldsymbol{\zeta}_{1m}$ и $\boldsymbol{\zeta}_{1m}^*$, каждое из которых также зависит от η_0 и с точностью до этой зависимости полностью определено. Поэтому $\det \mathcal{E}=0$ – уравнение относительно критической молекулярной магнитной диффузии η_0, при которой от семейства наименее устойчивых нейтральных мод для ненулевого полуцелого блоховского вектора $\mathbf{q}_0$ ответвляется рассматриваемое семейство.

В случае общего положения ядро оператора $\mathcal{E}$ одномерно, что мы для простоты в дальнейшем предполагаем. Это позволяет найти из (19) направление вектора $\mathbf{q}_1$. Тогда условие разрешимости уравнения $\mathcal{E}\mathbf{q}=\mathbf{f}$ состоит в ортогональности $\mathbf{f}$ вектору из ядра оператора, сопряженного к $\mathcal{E}$, а решение $\mathbf{q}$ определяется с точностью до слагаемого, пропорционального $\mathbf{q}_1$.

Таким образом, система уравнений (14) полностью решена, и найдены величина критической диффузии η_0, при которой происходит ветвление, и вторые члены разложений (9): поля $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_1^*$ и коэффициент λ_1 (с точностью до длины вектора $\mathbf{q}_1$), а также направление вектора $\mathbf{q}_1/|\mathbf{q}_1|$.

УРАВНЕНИЯ В ПОРЯДКЕ ϑ^2

В порядке ϑ^2 уравнения (5), (6), (8) и (7) порождают следующие уравнения:

$$(\mathcal{D}_0-\lambda_0)\mathbf{b}_2+2\mathrm{i}\eta_0\left((\mathbf{q}_1\cdot\nabla)\mathbf{b}_1+(\mathbf{q}_2\cdot\nabla)\mathbf{b}_0\right)-\left(\nabla^2\mathbf{b}_0+2\mathrm{i}(\mathbf{q}_0\cdot\nabla)\mathbf{b}_0\right)+\mathrm{i}\mathbf{q}_1\times(\mathbf{V}\times\mathbf{b}_1)+\mathrm{i}\mathbf{q}_2\times(\mathbf{V}\times\mathbf{b}_0)=$$
$$=(\lambda_1+2\eta_0\mathbf{q}_1\cdot\mathbf{q}_0)\mathbf{b}_1+\left(\lambda_2+\eta_0\left(|\mathbf{q}_1|^2+2\mathbf{q}_2\cdot\mathbf{q}_0\right)-|\mathbf{q}_0|^2\right)\mathbf{b}_0, \quad (20.1)$$

$$\left(\mathcal{D}_0^*-\overline{\lambda_0}\right)\mathbf{b}_2^*+2\mathrm{i}\eta_0\left((\mathbf{q}_1\cdot\nabla)\mathbf{b}_1^*+(\mathbf{q}_2\cdot\nabla)\mathbf{b}_0^*\right)-\left(\nabla^2\mathbf{b}_0^*+2\mathrm{i}(\mathbf{q}_0\cdot\nabla)\mathbf{b}_0^*\right)-\mathrm{i}\mathbf{V}\times\left(\mathbf{q}_1\times\mathbf{b}_1^*+\mathbf{q}_2\times\mathbf{b}_0^*\right)=$$
$$=\left(\overline{\lambda_1}+2\eta_0\mathbf{q}_1\cdot\mathbf{q}_0\right)\mathbf{b}_1^*+\left(\overline{\lambda_2}+\eta_0\left(|\mathbf{q}_1|^2+2\mathbf{q}_2\cdot\mathbf{q}_0\right)-|\mathbf{q}_0|^2\right)\mathbf{b}_0^*, \quad (20.2)$$

$$2\eta_0\left(\mathbf{q}_2+\sum_m \mathrm{Im}\langle\frac{\partial\mathbf{b}_0}{\partial x_m}\cdot\overline{\mathbf{b}_2^*}+\frac{\partial\mathbf{b}_1}{\partial x_m}\cdot\overline{\mathbf{b}_1^*}+\frac{\partial\mathbf{b}_2}{\partial x_m}\cdot\overline{\mathbf{b}_0^*}\rangle\mathbf{e}_m\right)-2\mathbf{q}_0-2\sum_m \mathrm{Im}\langle\frac{\partial\mathbf{b}_0}{\partial x_m}\cdot\overline{\mathbf{b}_0^*}\rangle\mathbf{e}_m+$$
$$+\mathrm{Im}\langle(\mathbf{V}\times\mathbf{b}_0)\times\overline{\mathbf{b}_2^*}+(\mathbf{V}\times\mathbf{b}_1)\times\overline{\mathbf{b}_1^*}+(\mathbf{V}\times\mathbf{b}_2)\times\overline{\mathbf{b}_0^*}\rangle=0, \quad (20.3)$$

$$\langle\langle\mathbf{b}_0,\mathbf{b}_2^*\rangle\rangle+\langle\langle\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_1^*\rangle\rangle+\langle\langle\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_0^*\rangle\rangle=0. \quad (20.4)$$

Решение этой системы следует тому же плану, что и решение уравнений (14), полученных в порядке ϑ. Скалярно умножив (20.1) на $\mathbf{b}_0^*$ и (20.2) на $\mathbf{b}_0$, с учетом (18) найдем:

$$\lambda_2=\langle\langle 2\mathrm{i}\eta_0\left((\mathbf{q}_1\cdot\nabla)\mathbf{b}_1+(\mathbf{q}_2\cdot\nabla)\mathbf{b}_0\right)-\nabla^2\mathbf{b}_0-2\mathrm{i}(\mathbf{q}_0\cdot\nabla)\mathbf{b}_0+\mathrm{i}\mathbf{q}_1\times(\mathbf{V}\times\mathbf{b}_1)+\mathrm{i}\mathbf{q}_2\times(\mathbf{V}\times\mathbf{b}_0),\mathbf{b}_0^*\rangle\rangle-\eta_0\left(|\mathbf{q}_1|^2+2\mathbf{q}_2\cdot\mathbf{q}_0\right)+|\mathbf{q}_0|^2, \quad (21.1)$$

$$\overline{\lambda_2}=\langle\langle 2\mathrm{i}\eta_0\left((\mathbf{q}_1\cdot\nabla)\mathbf{b}_1^*+(\mathbf{q}_2\cdot\nabla)\mathbf{b}_0^*\right)-\nabla^2\mathbf{b}_0^*-2\mathrm{i}(\mathbf{q}_0\cdot\nabla)\mathbf{b}_0^*-\mathrm{i}\mathbf{V}\times\left(\mathbf{q}_1\times\mathbf{b}_1^*+\mathbf{q}_2\times\mathbf{b}_0^*\right),\mathbf{b}_0\rangle\rangle-\eta_0\left(|\mathbf{q}_1|^2+2\mathbf{q}_2\cdot\mathbf{q}_0\right)+|\mathbf{q}_0|^2. \quad (21.2)$$

Легко проверить, что правые части (21) – взаимно комплексно-сопряженные числа, используя тождество:

$$2\eta_0\left(\langle\langle(\mathbf{q}_1\cdot\nabla)\mathbf{b}_0,\mathbf{b}_1^*\rangle\rangle+\langle\langle\mathbf{b}_1,(\mathbf{q}_1\cdot\nabla)\mathbf{b}_0^*\rangle\rangle\right)+\langle-\left(\mathbf{q}_1\times\overline{\mathbf{b}_0^*}\right)\cdot(\mathbf{V}\times\mathbf{b}_1)+\left(\mathbf{q}_1\times\overline{\mathbf{b}_1^*}\right)\cdot(\mathbf{V}\times\mathbf{b}_0)\rangle=0,$$

которое получается скалярным умножением (14.1) на $\mathbf{b}_1^*$ и $\mathbf{b}_1$ на (14.2), и вычитанием одного произведения из другого. Действительную часть $\mathrm{Re}\lambda_2$ можно упростить, скалярно умножив (11.3) на $\mathbf{q}_2$ и сложив результат с (21.1):

$$\mathrm{Re}\lambda_2=-\mathrm{Im}\langle\langle 2\eta_0(\mathbf{q}_1\cdot\nabla)\mathbf{b}_1-2(\mathbf{q}_0\cdot\nabla)\mathbf{b}_0+\mathbf{q}_1\times(\mathbf{V}\times\mathbf{b}_1),\mathbf{b}_0^*\rangle\rangle-\mathrm{Re}\langle\langle\nabla^2\mathbf{b}_0,\mathbf{b}_0^*\rangle\rangle-\eta_0|\mathbf{q}_1|^2+|\mathbf{q}_0|^2.$$

Поскольку полученное выражение не обязательно равно нулю, по-видимому, этот член вносит вклад в разложение инкремента роста моды (на графиках из работы [Chertovskih, Zheligovsky, 2023b] отрезки магнитной диффузии η, на которых видно характерное поведение ответвляющихся семейств, весьма коротки, и ни на одном из них не удается различить, касается ли график инкрементов роста в точке ветвления η_0 графика инкрементов мод из семейства, от которого происходит ответвление, или касательные к этим графикам в точке η_0 для такой пары семейств разные).

Зависимость полученного выражения (21.1) для λ_2 от $\mathbf{q}_2$ линейная. После его подстановки в уравнения (20.1) и (20.2) условия разрешимости этих уравнений оказываются выполнены. Преобразованные уравнения (20.1) и (20.2) также линейны по $\mathbf{q}_2$. Их решения имеют вид:

$$\mathbf{b}_2 = \sum_m \boldsymbol{\zeta}_{1m} q_2^m + \boldsymbol{\zeta}_2 + \mu_2 \mathbf{b}_0, \qquad \mathbf{b}_2^* = \sum_m \boldsymbol{\zeta}_{1m}^* q_2^m + \boldsymbol{\zeta}_2^* + \mu_2^* \mathbf{b}_0^*, \tag{22}$$

где функции $\boldsymbol{\zeta}_2$ и $\boldsymbol{\zeta}_2^*$ не зависят от $\mathbf{q}_2$ и могут быть найдены как решения вспомогательных задач, которые легко вывести из указанных преобразованных уравнений, а μ_2 и μ_2^* – произвольные константы.

Подстановка (22) в (20.4) позволяет найти:

$$\mu_2 + \overline{\mu_2^*} = -\sum_m \langle \boldsymbol{\zeta}_{1m} \cdot \overline{\mathbf{b}_0^*} + \mathbf{b}_0 \cdot \overline{\boldsymbol{\zeta}_{1m}^*} \rangle q_2^m + \mu,$$

$$\mu = -\langle \boldsymbol{\zeta}_2 \cdot \overline{\mathbf{b}_0^*} + \mathbf{b}_0 \cdot \overline{\boldsymbol{\zeta}_2^*} + \mathbf{b}_1 \cdot \overline{\mathbf{b}_1^*} \rangle. \tag{23}$$

Как и коэффициенты μ_1 и μ_1^*, индивидуальные величины μ_2 и μ_2^* определяют нормировку мод $\mathbf{b}$ и $\mathbf{b}^*$, и потому не имеют принципиальной важности (хотя в дальнейшем их можно выбрать оптимально для упрощения выкладок при исследовании уравнений в старших порядках разложения по ϑ).

Подстановка выражений (22) и (23) в уравнение (20.3) преобразует его к виду:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}\mathbf{q}_2 + 2\eta_0 \sum_m \mathrm{Im} \langle \frac{\partial \mathbf{b}_0}{\partial x_m} \cdot \overline{\boldsymbol{\zeta}_2^*} + \frac{\partial \mathbf{b}_1}{\partial x_m} \cdot \overline{\mathbf{b}_1^*} + \frac{\partial \boldsymbol{\zeta}_2}{\partial x_m} \cdot \overline{\mathbf{b}_0^*} + \\
&\quad + \left(\mu - \frac{1}{\eta_0}\right) \frac{\partial \mathbf{b}_0}{\partial x_m} \cdot \overline{\mathbf{b}_0^*} \rangle \mathbf{e}_m - 2\mathbf{q}_0 + \\
&\quad + \mathrm{Im} \langle \left(\mathbf{V} \cdot \left(\overline{\boldsymbol{\zeta}_2^*} - \left(\mathbf{b}_0 \cdot \overline{\boldsymbol{\zeta}_2^*} \right) \overline{\mathbf{b}_0^*} \right) \right) \mathbf{b}_0 + \\
&\quad + \left(\boldsymbol{\zeta}_2 - \left(\boldsymbol{\zeta}_2 \cdot \overline{\mathbf{b}_0^*} \right) \mathbf{b}_0 \right) \left(\mathbf{V} \cdot \overline{\mathbf{b}_0^*} \right) + \\
&\quad + \left(\mathbf{V} \cdot \overline{\mathbf{b}_1^*} \right) \mathbf{b}_1 - \left(\mathbf{V} \cdot \overline{\mathbf{b}_0^*} \right) \left(\mathbf{b}_1 \cdot \overline{\mathbf{b}_1^*} \right) \mathbf{b}_0 \rangle = 0.
\end{aligned} \tag{24}$$

Как обсуждено в предыдущем разделе, это уравнение имеет решение, если его неоднородная часть ортогональна ядру оператора, сопряженного к $\mathcal{E}$. Поля $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_1^*$, а также $\boldsymbol{\zeta}_2$ и $\boldsymbol{\zeta}_2^*$, через которые выражается неоднородная часть (24), зависят от еще не найденной длины вектора $\mathbf{q}_1$, которую определяем из этого условия разрешимости (24). После удовлетворения этого условия определяем из (24) вектор $\mathbf{q}_2$ с точностью до произвольного слагаемого, пропорционального $\mathbf{q}_1$.

На этом решение системы (20) закончено. Полностью найдены все третьи (порядка ϑ^2) члены асимптотических разложений (9), за исключением вектора $\mathbf{q}_2$, определенного с точностью до произвольного слагаемого, пропорционального $\mathbf{q}_1$.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Мы изучили найденные численно в работе [Chertovskih, Zheligovsky, 2023b] случаи ответвления семейства наименее устойчивых блоховских магнитных мод (4) от аналогичного семейства наименее устойчивых мод, отвечающего полуцелому блоховскому вектору $\mathbf{q} \neq 0$. Вычислены первые члены асимптотических разложений (9) в степенные ряды по параметру $\vartheta = |\eta_0 - \eta|^{1/2}$ этих мод, ассоциированных с ними собственных значений оператора магнитной индукции и векторов $\mathbf{q}$, отвечающих максимальным по $\mathbf{q}$ инкрементам роста мод, в ответвляющемся семействе. Следуя описанному выше плану, несложно найти решение систем уравнений для коэффициентов этих разложений произвольных высших порядков ϑ^j для $j > 2$, однако ввиду отсутствия в настоящий момент практического интереса в построении полного разложения и определенной алгебраической громоздкости получаемых в процессе решения выражений, в данной работе это не сделано.

Внешне графики оптимальных векторов $\mathbf{q}$ в ответвляющихся семействах не сильно отличаются для случая $\mathbf{q}_0 = 0$, рассмотренного в работе [Chertovskih, Zheligovsky, 2023c], и для случая полуцелого $\mathbf{q}_0 \neq 0$, рассмотренного здесь, и магнитные моды в ответвляющихся семействах и их собственные значения допускают асимптотическое разложение по одному и тому же параметру $\vartheta = |\eta_0 - \eta|^{1/2}$. Однако в деталях свойства ответвляющихся семейств в этих двух случаях существенно разные:

1. Тогда как рассмотренные здесь разложения для $\mathbf{q}_0 \neq 0$ одинаковы в случаях центрально-симметричных течений и несимметричных, разложения для $\mathbf{q}_0 = 0$ в этих случаях существенно разные. Это объясняется тем, что для ненулевого блоховского вектора $\mathbf{q}$, в отличие от случая короткомасштабных ($\mathbf{q} = 0$) мод, из центральной симметрии течения для модифицированного оператора магнитной индукции (12) не следует инвариантность подпространств центрально-симметричных и центрально-антисимметричных полей.

2. Как было показано в работе [Chertovskih, Zheligovsky, 2023c], в задаче кинематического динамо для центрально-симметричных течений при ответвлении от семейства наименее устойчивых короткомасштабных нейтральных (т.е. принадлежащих ядру оператора магнитной индукции) магнитных мод, точка ветвления (критическая молекулярная магнитная диффузия)

определяется из условия потери устойчивости к действию вихревой магнитной диффузии, т.е. в точке появления у оператора вихревой магнитной диффузии собственного значения с нулевой действительной частью. В противоположность этому, в анализе для полуцелого $\mathbf{q}_0 \neq 0$, приведенном здесь, операторы магнитного α-эффекта или вихревой магнитной диффузии (или аналогичные им) не возникают, т.е. ветвление не связано с этими явлениями, а точка ветвления определяется появлением нетривиального ядра у оператора $\mathcal{E}$, генетически связанного с необходимым условием (1) экстремальности инкрементов мод, составляющих ответвляющееся семейство. С одной стороны, это следствие того обстоятельства, что оператор магнитной индукции $\mathcal{M}$ (2) имеет как минимум трехмерное ядро [Арнольд и др., 1982], а при исследовании ответвления от семейства нейтральных короткомасштабных магнитных мод он играет ту же роль, что и оператор $\mathcal{D}_0 - \lambda_0$ (имеющий одномерное ядро) в настоящей работе. С другой, приведенное нами разложение показывает, что многообразие физических явлений, связанных с многомасштабностью МГД системы, не сводится к явлениям α-эффекта или вихревой (турбулентной) диффузии (впрочем, в рассматриваемом здесь случае отношение пространственных масштабов порядка $|\mathbf{q}_0|^{-1} \leq 2$ не велико).

3. В работе [Chertovskih, Zheligovsky, 2023c] было установлено, что при ответвлении от семейства наименее устойчивых короткомасштабных нейтральных магнитных мод разложение собственных значений для магнитных мод начинается с чисто мнимого слагаемого. Построенные здесь разложения также обладают этим свойством: первый член разложения собственного значения равен собственному значению моды в точке ветвления в семействе, от которого происходит ответвление, а следующий чисто мнимый. Однако разложение инкрементов мод в ответвляющемся семействе в случае $\mathbf{q}_0 = 0$ начинается с члена порядка ϑ^4, в противоположность этому в рассматриваемом здесь случае первый ненулевой субдоминирующий член разложения инкрементов (в общем случае) порядка ϑ^2.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Исследование выполнено за счет гранта Российского Научного Фонда № 22-17-00114, https://rscf.ru/project/22-17-00114/.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Арнольд В.И., Зельдович Я.Б., Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д. Стационарное магнитное поле в периодическом потоке // Докл. АН СССР. 1982. Т. 266. С. 1357–1351.

Желиговский В.А. Математическая теория устойчивости магнитогидродинамических режимов к длинномасштабным возмущениям. М.: Красанд–УРСС. 2010. 352 с.

Желиговский В.А., Чертовских Р.А. О кинематической генерации магнитных мод блоховского типа // Физика Земли. 2020. № 1. С. 118–132. (Перевод на англ.: Zheligovsky V.A., Chertovskih R.A. On kinematic generation of the magnetic modes of Bloch type // Izvestiya, Physics of the Solid Earth. 2020. V. 56. P. 103–116.)

Краузе Ф., Рэдлер К.-Х. Магнитная гидродинамика средних полей и теория динамо. М.: Мир. 1984. 320 с. (Пер. с англ.: Krause F., Rädler K.-H. Mean-field magnetohydrodynamics and dynamo theory. Berlin: Academic-Verlag. 1980. 271 p.)

Bloch F. Über die Quantenmechanik der Elektronen in Kristallgittern. Zeitschrift für Physik A // Hadrons and Nuclei. 1929. V. 52. P. 555–600.

Chertovskih R., Zheligovsky V. Linear perturbations of the Bloch type of space-periodic magnetohydrodynamic steady states. I. Mathematical preliminaries // Russian J. of Earth Sciences. 2023a. V. 23. ES3001. DOI:10.2205/2023es000834

Chertovskih R., Zheligovsky V. Linear perturbations of the Bloch type of space-periodic magnetohydrodynamic steady states. II. Numerical results // Russian J. of Earth Sciences. 2023b. V. 23. ES4004. DOI:10.2205/2023es000838

Chertovskih R., Zheligovsky V. Linear perturbations of the Bloch type of space-periodic magnetohydrodynamic steady states. III. Asymptotics of branching // Russian J. of Earth Sciences. 2023c. V. 23. ES5004. DOI:10.2205/2023es000841

Rädler K.-H. Mean-field dynamo theory: early ideas and today's problems. Magnetohydrodynamics. Historical evolution and trends. Fluid mechanics and its applications. V. 80 / Molokov S., Moreau R., Moffatt K. (eds.). Springer. 2007. P. 55–72.

Zheligovsky V.A. Large-scale perturbations of magnetohydrodynamic regimes: linear and weakly nonlinear stability theory. Lecture Notes in Physics. V. 829. Heidelberg: Springer-Verlag. 2011. 330 p.

Asymptotics of Branching of Families of the Least Stable Magnetic Modes of the Bloch Type

V. A. Zheligovsky

Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, Moscow, 117997 Russia

Received February 26, 2024
revised March 04, 2024
accepted April 27, 2024

Abstract – We consider the kinematic generation of Bloch magnetic modes by a space-periodic flow of an electrically conducting fluid. A Bloch mode is a vector field that is the product of a three-dimensional field of the flow periodicity, and a Fourier harmonic $e^{\mathbf{iq{\cdot}x}}$ for an arbitrary wave vector $\mathbf{q}$. Previous computations showed that the modes whose growth rates are maximum over all vectors $\mathbf{q}$ are arranged in families, which are smoothly parameterised by the molecular magnetic diffusivity. In some families, the growth rates assume the maximum for the so-called half-integer $\mathbf{q}$, whose all components are integer or half-integer, and $\mathbf{q}$ is constant for the entire family. From such families, other families can stem, in which the optimal $\mathbf{q}$ of the modes varies smoothly over a family. For the modes comprising such offshoot families, the associated eigenvalues of the magnetic induction operator and the optimal $\mathbf{q}$, we construct here asymptotic expansions in power series in the parameter $\vartheta = (\eta_0 - \eta)^{1/2}$, where η_0 is the magnetic diffusivity for which the branching occurs. In this paper, we assume that the modes in the family undergoing the branching involve a constant non-zero half-integer wave vector $\mathbf{q}$. The asymptotic expansions differ significantly from the similar expansions that we constructed earlier for the branching from a family of short-scale (i.e., for $\mathbf{q} = 0$) neutral (associated with a zero eigenvalue of the magnetic induction operator) magnetic modes generated by a parity-invariant flow.

Keywords: kinematic magnetic dynamo, magnetic field generation, Bloch mode, asymptotic expansion in a power series, family branching